Valós analízis 2 gyakorlat, 2015. február 19. 14^{15}–15^{45} és február 23. 9^{10}–9^{55}

Emlékeztető: évfolyamzh: március 17., 12:00-14:00, Északi tömb -1.85 Harmónia terem

1. Hányadik deriváltról van szó?

„Csökkent az infláció növekedésének dinamizmusa." (Antall József miniszterelnök, 199?.)

„Lassult a gazdasági folyamatok növekedésének dinamikája." (Hegedűs Éva helyettes államtitkár, 2001.)

2. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f^{(6)}(x) = 0$ teljesül $\forall x \in \mathbb{R}$-re.

3. Egy $a \times b$ méretű papírból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a sarkaiból levágunk egy-egy $c \times c$-es négyzetet, és az oldalakat felhajtjuk. Hogyan válasszuk meg a c értékét, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

4. Mutassuk meg, hogy ha f és g differenciálható $[a, b]$-ben, $f(a) \geq g(a)$, és $\forall x \in [a, b]$-re $f'(x) \geq g'(x)$, akkor $\forall x \in [a, b]$-re $f(x) \geq g(x)$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \geq 0$-re $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

6. Legfeljebb hány különböző nullhelye lehet az $f(x) = e^x - p(x)$ függvénynek, ha p egy n-edfokú polinom?

7. Az alsó és felső határértékek mintájára definiáljuk egy függvény alsó és felső deriváltját az a pontban így: $\underline{f'}(a) = \liminf\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, illetve $\overline{f'}(a) = \limsup\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (Lásd még: jobb-felső stb. derivált.)

Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?

(a) Az f függvény a-ban lokálisan növekedő. (b) Az f függvény a-ban lokálisan szigorúan növekedő.

(c) $\overline{f'}(a) \geq 0$. (d) $\underline{f'}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'}(a) > 0$. (f) $\underline{f'}(a) > 0$.

8. Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\xi \in (a, b)$ szám, amire

$$\underline{f'}(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \overline{f'}(\xi).$$

Igaz marad-e ez az állítás, ha csak azt kötjük ki, hogy f féloldalról folytonos az a és a b pontban?

9. (a) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható a $[0, 2]$ intervallumban, és $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (0, 2)$, amire $f''(\xi) = 0$.

(b) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható a $[0, 2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0, 2)$, amire $f''(\xi) = f(0) - 2f(1) + f(2)$.

10. Általánosítsuk a Lagrange-középértéktételt $n + 1$ alappontra és n-edik deriváltra.

Házi feladatok február 23-ra

11. Mi az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$ függvény értékkészlete?

12. Tegyük föl, hogy f differenciálható $\mathbb{R}$-en, és $f' = f$. Mutassuk meg, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = ce^x$.

13. Igazoljuk, hogy ha f differenciálható $\mathbb{R}$-en, és f' korlátos, akkor f Lipschitz.

14. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \geq 0$-re $x - \dfrac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$.

15. Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?

(a) f-nek a-ban lokális minimuma van. (b) f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

(c) $f'(a) = 0$. (d) $\overline{f'_-}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_+}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'_+}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_-}(a) \geq 0$.

(f) $\overline{f'_-}(a) < 0$ és $\underline{f'_+}(a) > 0$. (g) $\overline{f'_+}(a) < 0$ és $\underline{f'_-}(a) > 0$.

16. Legyen $n \geq 2$ egész szám, és legyen $f \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n-szer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f^{(n)}(x) = 0$ egyenletnek legalább $n - 1$ különböző megoldása van.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM2. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$, és $0 < x < \pi$, akkor $\dfrac{\sin ax}{\sin x} > ae^{\frac{1-a^2}{6}x^2}$.

PM3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész számra és $x > 0$-ra

$$\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{x}} - \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{x+3}} + - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{x+n}} > 0.$$

Korábbi feladatsorok: http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2015tav-an2/

Gyakorló feladatok: Fehér-Kós-Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II (http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101)

Gémes-Szentmiklóssy: Analízis feladatgyűjtemény I (http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101)