Valós analízis 4 gyakorlat, 2015. március 20.

1. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $\overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \frac{99}{100}(b-a)$, akkor H nullmértékű.

2. Legyen X nem megszámlálható halmaz, $\mathcal{M}$ pedig az X egyelemű részhalmazai által generált σ-algebra.

a) Jellemezzük $\mathcal{M}$ elemeit!

b) Konstruáljunk olyan α valószínűségi mértéket $\mathcal{M}$-en, mely szerint az egyelemű halmazok nullmértékűek!

c) Határozzuk meg az α által generált ϕ_α külső mértéket!

d) Mi a ϕ_α által meghatározott mérték és mely halmazok mérhetőek?

3. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli halmaz (a) minden Borel-halmazt; (b) minden G_δ halmazt; (c) minden F_σ halmazt; (d) minden nyílt halmazt; (e) minden zárt halmazt; (f) minden intervallumot; (g) minden egységnyi hosszúságú intervallumot jól vág ketté a külső Lebesgue-mérték szerint, akkor Lebesgue-mérhető?

4. (a) Bármely két $A, B \subset [0,1]$ halmaz távolsága legyen $d(A,B) = \overline{\lambda}(A \triangle B)$. Mutassuk meg, hogy d metrika $P([0,1])$-en.

(b) Legyen $\mathcal{L} \subset P([0,1])$ a Lebesgue-mérhető halmazok σ-gyűrűje, és legyen $\mathcal{I} \subset P([0,1])$ az olyan halmazok gyűrűje, amik előállnak véges sok korlátos, racionális végpontú, balról zárt, jobbról nyílt intervallum uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{I}$ sűrű részhalmaza $\mathcal{L}$-nek, azaz $\forall A \in \mathcal{L}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{I}\ \lambda(A \triangle B) < \varepsilon$.

(c) Sűrű részhalmaza-e $\mathcal{I}$ $\mathcal{L}$-nek?

5. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 & \text{ha } x > 0, \end{cases}$ és $g(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a $\overline{\mu}_f$ és $\overline{\mu}_g$ Lebesgue-Stieltjes külső mértékeket és a mérhető halmazok rendszereit.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, balról folytonos függvény, és μ_f az f által generált Lebesgue-Stieltjes mérték. Igazold, hogy tetszőleges Borel-mérhető H halmazhoz léteznek olyan F_σ $B \subset H$ és G_δ $K \supset H$ halmazok, amikre $\mu_f(B) = \mu_f(K) = \mu_f(H)$.

7. (a) Igazoljuk, hogy ha μ mérték egy σ-gyűrűn, akkor a σ-véges halmazok σ-gyűrűt alkotnak.

(b) Milyen σ-algebrát generálnak a σ-véges halmazok?

Házi feladatok

8. Mérték-e a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

9. Konstruálj olyan $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt, amelyre tetszőleges $a < b$ esetén $\lambda((a,b) \cap H) > 0$ és $\lambda((a,b) \setminus H) > 0$.

10. Bizonyítsd be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^2$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor tartalmaz szabályos 2014-szöget.

11. (a) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(A) > 0$, akkor $A - A$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

(b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nemüres.

(c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nemüres.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM6. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz előáll nem üres belsejű konvex halmazok uniójaként, akkor Lebesgue-mérhető.

Korábbi feladatsorok itt: http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2015tav-an4/

További gyakorló feladatok: http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101