Valós analízis 4 gyakorlat, 2015. április 17.

1. Bizonyítsd be, hogy minden Riemann-integrálható $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-mérhető.

2. Adott mérhető $f : X \to \mathbb{R}$ függvényre melyikből következik a másik?
(i) f integrálható X-en,
(ii) $|f|$ integrálható X-en.

3. Kicserélhetjük-e a Fatou-lemmában a liminf-et limsup-ra?

4. Vezessük le be a Fatou-lemmából a monoton konvergencia tételt.

5. Fogalmazzuk át a kis Lebesgue-tételt véges összegekre.

6. Mutassunk példát olyan, pontonként konvergens $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatra, amire $\lim \int_0^1 f_n$ létezik, de $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$.

7. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ (a) korlátos intervallum; (b) véges sok korlátos intervallum uniója; (c) véges mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx) d\lambda = 0.$$

8. Igazoljuk a Fatou-Lebesgue tételt: ha az (X,μ) mértéktéren $f_1, f_2, \ldots$ és g mérhető, $|f_n| \leq g$ minden n-re, és g integrálható, akkor

$$\int_X (\liminf f_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X (\limsup f_n) \mathrm{d}\mu.$$

Házi feladatok

9. (a) Igazold, hogy ha az (X,μ) mértéktéren $f_1, f_2, \ldots$ és $g_1, g_2, \ldots$ nemnegatív mérhető függvények, akkor

$$\liminf \int_X (f_n + g_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu + \limsup \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_X (f_n + g_n) \mathrm{d}\mu.$$

10. Konstruálj olyan mérhető $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, ami semmilyen teljes mértékű halmazra megszorítva sem folytonos.

11. Igaz-e, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.?

12. Fogalmazd át a nagy Lebesgue-tételt számsorok sorozataira.

13. Vezesd le a nagy Lebesgue-tételből a korábbi, az integrál és a pontonkénti határérték felcserélhetőségéről szóló tételeket (monoton konvergencia, Beppo Levi, Fatou-lemma, Fatou-Lebesgue tétel, kis Lebesgue-tétel).

14. Igaz-e, hogy minden Riemann-integrálható $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető?

15. Legyen μ olyan Borel-mérték a $(0,\infty)$ félegyenesen, amire $\mu\big((0,\infty)\big) = 1$. Igazold, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \cos\frac{x}{n} \, \mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM8. Igaz-e, hogy Lebesgue-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények tetszőleges sorozatából kiválasztható olyan részsorozat, aminek m.m. pontban van határértéke?

PM9. Bizonyítsuk be Luzin tételét: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-nál kisebb mértékű D halmaz, hogy f folytonos $[a,b] \setminus D$-n.

Korábbi feladatsorok itt: http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2015tav-an4/
További gyakorló feladatok: http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101