6. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 3.

ZH. (évfolyamzh) időpont: október 21-e, péntek, 18:00-20:00, helyszín: Déli tömb 0-821 (Bolyai terem).

6.1. Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.
R1'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.
R2'. x akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.
R3'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.
R4'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.
Ezek után a $<$ relációt definiáljuk a következőképpen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív. Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

6.2. Igazoljuk, hogy tetszőleges x, y valós számokra $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

6.3. Mutassuk meg, hogy ha egy rendezett testben $\mathbb{Q}$ sűrű, akkor a test arkhimédészi.

6.4. Nevezzünk egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt szépnek, ha $(1 \in H) \wedge \big((\forall x \in H)\ (x+1) \in H\big)$. Legyen N a szép halmazok metszete.
(a) Mutassuk meg, hogy N szép halmaz.
(b) Igazoljuk, hogy ha $A : N \to \{\text{igaz}, \text{hamis}\}$ logikai függvény, amire $A(1) \wedge \big((\forall n \in N)\ A_n \implies A_{n+1}\big)$, akkor $(\forall n \in N) A(n)$.
(c) Igazoljuk, hogy N minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.

6.5. A következő függvényekről bizonyítsuk be, hogy a megadott H-halmazon injektívek:
a) $f(x) = 3x - 7$, $H = \mathbb{R}$;
b) $f(x) = x^2 + 3x - 6$, $H = [-3/2, \infty)$;
c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $H = (-1, 1)$.
Határozzuk meg, a fenti esetekben az $F : H \to f(H)$ bijekció inverzét!

6.6. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in N$-re.

Házi feladatok

6.7. (a) Ellenőrizzük, hogy a pozitív racionális számok halmazán az $a +_Q b = a \cdot b$ művelet kielégíti az első négy axiómát. Mi lesz a nullelem?
(b) Bizonyítsuk be, hogy *nincs* olyan szorzás, amellyel együtt testet kapunk.

6.8. Adott egy R rendezett test, aminek $\mathbb{Q}$ részteste. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(\forall a, b \in R)\left((1 < a < b < 2) \Rightarrow \Big((\exists q \in \mathbb{Q})\ (a < q < b)\Big)\right),$$

akkor R-ben teljesül az Arkhimédészi axióma.

6.9. Mi a $2x^3 - 3x^5$ függvény maximuma a $[0, 1]$ intervallumban?

6.10. Mutassunk olyan n_0 számot, amire $n \geq n_0$ esetén

$$\frac{11^n - n^{10}}{10^n n^5 + 1000} < 10^{-10}.$$

6.11. A közepek közötti egyenlőtlenségekkel vagy a Bernoulli-egyenlőtlenséggel bizonyítsuk be, hogy $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, és $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu