7. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 5.

ZH. (évfolyamzh) időpont: október 21-e, péntek, 18:00-20:00, helyszín: Déli tömb 0-821 (Bolyai terem).

7.1. A Cantor-axiómában megköveteltük, hogy az egymásba skatulyázott intervallumsorozat korlátos, zárt és nemüres intervallumokból álljon. Ellenőrizzük, hogy a Cantor-axióma állítása nem marad igaz, ha bármelyik feltételt elhagyjuk.

7.2. Legyen $(R, <)$ egy nemüres rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy trichotóm és tranzitív kétváltozós $<$ reláció). Ebben a halmazban a szokásos módon definiáljuk az (a, b), $[a, \infty)$, $\emptyset$ stb. intervallumokat. Egy $K \subset R$ halmazt nevezzünk *konvex*nek, ha minden $a, b \in K$, $a < b$ esetén $[a, b] \subset K$.

(a) Mutassuk meg, hogy minden intervallum konvex.

(b) Mutassuk meg, hogy a $(\mathbb{Z}, <)$ halmazban minden konvex halmaz intervallum.

(c) Mutassuk példát a $(\mathbb{Q}, <)$ halmazban olyan konvex halmazra, ami nem intervallum.

(d) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$-ben minden konvex halmaz intervallum.

(e) Mutassuk példát a racionális tört függvények rendezett testében olyan konvex halmazra, ami nem intervallum.

7.3. Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Mi a felső, illetve alsó korlátaik halmaza? Mi a maximumuk, a minmimumuk, a szuprémumuk és az infimumuk? Melyik halmaz konvex?

$$\emptyset \qquad \{1, 2, 3, \dots\} \qquad \left\{\tfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \qquad [1, 2) \qquad (2, 3] \qquad [1, 2) \cup (2, 3]$$

7.4. Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy

(a) $\inf H < \sup H$; (b) $\inf H = \sup H$; (c) $\inf H > \sup H$?

7.5. Bizonyítsuk be az $[1, 2]$ intervallum felezgetésével, hogy van olyan $c \in [1, 2]$, amire $c^2 = 2$.

7.6. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n + 1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím. (KöMaL F. 2405.)

7.7. Az *1-dimenziós Helly-tétel* szerint ha I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy nemüres rendszere úgy, hogy közülük semelyik kettő metszete nemüres, akkor az összes I_α metszete sem üres.

(a) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

(c) Igaz-e az 1-dimenziós Helly-tétel a racionális számok testében?

(d) A Cantor-axióma segítségével igazoljuk az 1-dimenziós Helly-tételt. (Segítség: nevezzünk egy x valós számot *egér*nek, ha $\exists \alpha \in A$ $I_\alpha \subset (x, \infty)$, illetve *elefánt*nak, ha $\exists \alpha \in A$ $I_\alpha \subset (-\infty, x)$. Keressünk olyan számot, ami sem nem egér, sem nem elefánt, vagyis oroszlán.

Házi feladatok

7.8. Legyen $A \cap B \neq \emptyset$. Mit tudunk mondani $\sup A$, $\sup B$, $\inf B$ számok és $\sup(A \cup B)$, $\sup(A \cap B)$, illetve $\sup(A \setminus B)$ kapcsolatáról?

7.9. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazok, és $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $a \leq b$, akkor van olyan c valós szám, amire $\forall a \in A$ $a \leq c$ és $\forall b \in B$ $c \leq b$. (teljességi axióma)

7.10. Bizonyítsuk be az 1-dimenziós Helly-tételt a legkisebb felső korlát tételéből. (Vizsgáljuk az alsó végpontok halmazát.)

7.11. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a legkisebb felső korlát tétele, akkor

(a) a testben teljesül az arkhimédészi axióma; (b) a testben teljesül a Cantor-axióma.

(c) a test izomorf a valós számok testével.

7.12. Teljesül-e a racionális törtfüggvények rendezett testében a Cantor-axióma?

7.13. Olvassuk tovább a *Hogyan fogjunk oroszlánt?* c. cikket a $\sqrt{2}$ létezésének második bizonyításáig. (`http://www.komal.hu/cikkek/kg/oroszlan/oroszlan.h.shtml`)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM7. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén. (IMO 1985/6)

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/`

További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`