8. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 10.

ZH. (évfolyamzh) időpont: október 21-e, péntek, 18:00-20:00, helyszín: Déli tömb 0-821 (Bolyai terem).

8.1. Legyen egy R rendezett testben $a > 0$ és k pozitív egész. Egy $c \in R$ elemet nevezzünk egérnek, ha $c^k < a$, oroszlánnak, ha $c^k = a$, illetve elefántnak, ha $c^k < a$.

(a) Mutassuk meg, hogy léteznek egerek és elefántok is.
(b) Mutassuk meg, hogy minden egérnél van nagyobb egér.
(c) Mutassuk meg, hogy minden elefántnál van kisebb elefánt.
(d) Legfeljebb egy oroszlán létezik.

8.2. Igazoljuk a $\sqrt[k]{a}$ létzését $\mathbb{R}$-ben

(a) intervallumfelezéssel;
(b) az egerek szuprémumával és a elefántok infimumával;
(c) a teljességi axiómával (7.9. feladat)

8.3. Mutassuk meg, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazok, akkor $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

8.4. Mutassuk meg, hogy ha $a > 0$ és $x, y \in \mathbb{Q}$, akkor $(a^x)^y = a^{xy}$.

8.5. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall a \in H \quad \exists r > 0 \quad (a - r, a + r) \subset H$. Melyik nyílt az alábbi halmazok közül?

$$\emptyset \qquad \mathbb{R} \qquad (a, b) \qquad [a, b] \qquad (1, 2) \cup (3, 4) \qquad [1, 2] \cup [3, 4] \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

8.6. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *sehol sem sűrű*, ha $\forall a, b \in \mathbb{R} \left(\exists c, d \in \mathbb{R} \left(a < c < d < b \ \wedge \ H \cap (c, d) = \emptyset\right)\right)$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ nem tartalmaz intervallumot.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $G_1, G_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ sűrű nyílt halmazok, akkor $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ is sűrű. (Baire féle kategóriatétel)

8.7. Bizonyítsuk be Borel fedési tételét: Ha K korlátos, zárt intervallum, és I_α ($\alpha \in A$) nyílt halmazoknak egy olyan rendszere, ami *lefedi* K*-t*, azaz $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$, akkor van olyan véges $V \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in V} I_\alpha$. Más szóval, K minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

(Segítség: indirekt tegyük fel, hogy semelyik véges sok I_α nem fedi K-t, és felezgessük K-t.)

Házi feladatok

8.8. Mutassuk meg, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazok, akkor $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

8.9. Igazoljuk a $\sqrt[k]{a}$ létezését $\mathbb{R}$-ben

(a) a Helly-tétellel (vegyük az összes olyan korlátos intervallumot, amelynek alsó végpontja egér, felső végpontja elefánt);
(b) Borel fedési tételéből (lefednek-e az $(0, e)$ és (E, ∞) alakú intervallumok egy bizonyos $[e_0, E_0]$ intervallumot?);
(c) abból, hogy az $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0,\ x^k \leq a\}$ halmaz konvex, tehát intervallum;

8.10. Igaz-e a Dedekind-féle "teljességi axióma" (7.9. feladat) a racionális tört függvények rendezett testében?

8.11. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel, akkor

(a) a testben igaz az Arkhimédészi axióma;
(b) a testben igaz a Cantor-axióma;
(c) a test izomorf a valós számok testével.

Szorgalmi feladatok

8.12. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{Q}$ nem összefüggő;

b) $\mathbb{R}$ összefüggő;

c) a racionális törtfüggvények teste nem összefüggő.

8.13. Legyen R rendezett test, $A = \{x \in R : \ x^2 > 2\}$ és $B = \{x \in R : \ x^2 < 2\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok nyíltak.

(b) Mutassuk meg, hogy ha R összefüggő, akkor van olyan $a \in R$, amire $a^2 = 2$.

8.14. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett test összefüggő, akkor izomorf $\mathbb{R}$-rel.

8.15. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a test izomorf a valós számok testével.

8.16. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben minden konvex halmaz intervallum, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

8.17. Legyen $(R, <)$ egy nemüres rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy trichotóm és tranzitív kétváltozós $<$ reláció). Egy $H \subset R$ halmazt nevezzünk *nyíltnak*, ha minden $x \in H$-hoz létezik olyan I nyílt intervallum, amire $x \in I \subset H$. (Az I intervallum lehet végtelen is.)

Keressünk a következő állítások között ekvivalenseket. Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ stb. implikációk közül minél többre, illetve mutassunk ellenpéldát azokban az esetekben, amikor az implikáció nem igaz.

(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja.

(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

(c) R-ben igaz a teljességi axióma.

(d) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

(e) R minden konvex részhalmaza összefüggő.

(f) R minden intervalluma összefüggő.

(g) R összefüggő.

(h) R minden konvex részhalmaza intervallum.

(i) R-ben igaz Borel fedési tétele.