11–12. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 19. és 24.

ZH. (évfolyamzh) időpont: október 21-e, péntek, 18:00-20:00, helyszín: Déli tömb 0-821 (Bolyai terem).

11.1. Mi legyen 0^0, ∞^0 és 1^∞?

11.2.

$$\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = ? \qquad \lim \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^n = ?$$

11.3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozatnak minden részsorozata konvergens, akkor a sorozat konvergens.

11.4. Bizonyítsuk be a Bolzano-Weierstrass tételt intervallumfelezéssel.

11.5. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $(-1)^n$ és a $(-1)^n/\sqrt{n}$ sorozatokra.

11.6. Mi az alábbi sorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora? Mik a torlódási pontjaik?

$$\sqrt[n]{n}; \qquad (-1)^n + \frac{1}{n}; \qquad \left\{\sqrt{n}\right\}$$

11.7. Tegyük fel, hogy $a_n \to -\infty$, és legyen $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. (Értelmes egyáltalán ez a definíció? Biztos, hogy a maximum létezik?) Mutassuk meg, hogy $b_n \to -\infty$.

11.8. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) és (b_n) számsorozatok, és elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, akkor $\underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n$ és $\overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n$.

11.9. (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatra

$$\liminf \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \liminf a_n \quad \text{és} \quad \limsup \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \le \limsup a_n.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor

$$\lim \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim a_n.$$

Házi feladatok

11.10. Mi legyen $\sqrt[0]{1}$ és $\sqrt[\infty]{\infty}$?

11.11.

$$\lim \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n-4} = ?$$

11.12. Bizonyítsd be, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont, avagy, ha c torlódási pontja a (b_k) számsorozatnak, és (b_n) minden eleme torlódási pontja az (a_n) sorozatnak, akkor c torlódási pontja (a_n)-nek.

11.13. (a) Bizonyítsd be, hogy ha a_n és b_n két számsorozat úgy, hogy mindkettő alulról korlátos vagy mindkettő felülről korlátos, akkor

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}(a_n + b_n) \le \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

(b) Keress olyan (a_n) és (b_n) korlátos sorozatokat, amikor
(b1) egyik esetben sincs egyenlőség;
(b2–b5) pontosan az egyik egyenlőségnél áll fenn egyenlőség (4 példa).
(c) Mutassuk meg, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

11.14. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \to b$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM11.1. Vezesd le a Cauchy-kritérium elégségességét az 1-dimenziós Helly-tételből.

PM11.2. Azt mondjuk, hogy az $A = (a_1, a_2, \dots)$ pozitív számokból álló sorozat nagyságrendje nagyobb, mint a $B = (b_1, b_2, \dots)$ pozitív számokból álló sorozaté, ha $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$. Ennek jelölése lehet pl. $A \gg B$, $(a_n) \gg (b_n)$ vagy $a_n \gg b_n$.

(a) Legyen $A^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots), A^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots), A^{(3)} = (a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots), \dots$ pozitív számokból álló sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy a $c_n = n \cdot \max(1, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(n)})$ sorozat nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $A^{(i)}$ sorozat nagyságrendje.

(b) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$ végtelenhez tartó sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan, szintén végtelenhez tartó C sorozat, amelyre $\forall i\ C \ll A^{(i)}$.

(c) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$, illetve $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \dots$ pozitív számokból álló sorozatok egy-egy sorozata úgy, hogy $\forall i, j\ A^{(i)} \ll A^{(j)}$. Igazoljuk, hogy létezik olyan C sorozat, amelyre $\forall i, j\ A^{(i)} \ll C \ll B^{(j)}$.