B. Sc. I. Mat. Intenzív Analízis, 2016/17, I. félév

Első ZH, 2016. október 21.

Kérjük, hogy minden beadott lapra írd rá a nevedet és a gyakorlatvezetőd nevét.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit nagyjából más is el tudok olvasni.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1. Legyen $H_{20} = \{1, 2, ..., 20\}$. Hány olyan különböző A részhalmaza van H_{20}-nak, melyre

$$\overline{(1 \in A) \Longrightarrow (4 \in A)} \vee \Big((\{2, 3\} \subset A) \Longrightarrow 7 \in A \Big)$$

teljesül?

2. Mutassuk meg, hogy $2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + ... + (3n - 1)(3n + 2) = 3n^3 + 6n^2 + n$.

3. Döntsük el, hogy $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ irracionális-e.

4. Csak a test-, a rendezési axiómákat és az előadáson a test- és rendezési axiómákból közvetlenül levezetett tételeket használva bizonyítsuk be a következő két állítást:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$-re $-(a - b) = b - a$; b) Ha $a^3 < b^3 < 0$, akkor $a < b < 0$.

5. Legyen $a_1 = \frac{1}{3}$ és $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$. Mutassuk meg, hogy a_n minden n-re értelmezett. Vizsgáljuk meg a sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából.

6. A határérték megfelelő definíciója szerint $\varepsilon > 0$-hoz alkalmas n_ε küszöbszámot keresve adjuk meg a következő sorozat határértékét: $\dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1}$.

7. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a testben teljesül a legkisebb felső korlát tétele is.