14. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 7.

14.1. Ábrázoljuk az $\{\frac{1}{x}\}$ és az $x \cdot [\frac{1}{x}]$ függvényeket.

14.2. (a) Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely sem nem páros, sem nem páratlan.
(b) Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, mely egyszerre páros és páratlan.
(c) Mutassuk meg, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előáll, mint egy páros és páratlan függvény összege.

14.3. Létezik-e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek minden pontban szigorú lokális maximuma van?

14.4. Bizonyítsuk be, hogy x^k szigorúan konvex $[0, \infty)$-ben, minden $k > 1$ egész számra.

14.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, ..., a_n \geq 0$ és $k > 1$ egész, akkor
$\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\dfrac{a_1^k + ... + a_n^k}{n}}$.

14.6. Legyen f valós függvény egy I intervallumon. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor konvex, ha I minden belső a pontjához van olyan $\ell(x)$ lineáris függvény, amire $\ell(a) = f(a)$, és $f(x) \geq \ell(x)$ minden $x \in I$-re.

14.7. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x = y^2 + y; \qquad y = (2^{x+1} - 5)/3.$$

Házi feladatok

14.8. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és legyen
a) f páros, g páratlan; b) f páros, g páros; c) f páratlan, g páratlan.
Mit tudunk mondani az a), b), illetve c) esetekben az $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, illetve $f \circ g$ függvények páros, illetve páratlan voltáról?

14.9. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\sqrt{x}$ szigorúan konkáv $[0, \infty)$-ben;
b) $\sqrt[k]{x}$ szigorúan konkáv $[0, \infty)$-ben minden $k > 1$ egészre.

14.10. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex, de nem szigorúan konvex, akkor van olyan nem elfajuló intervallum, ahol lineáris.

14.11. Fel lehet-e bontani az $f(x) = x^2$ függvényt két periodikus függvény összegére?

14.12. Lehet-e egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek megszámlálhatónál több sok szigorú lokális szélsőértékhelye?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM14.1. Fel lehet-e bontani az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ függvényt két periodikus függvény összegére?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu