16. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 14.

16.1. Írjuk fel a definíciót kvantorokkal és $\varepsilon, \delta, P, Q$ stb. betűkkel.

$$\lim_{1} f = \infty; \quad \lim_{\eta\to\eta_0-0} s(\eta) = 2; \quad \lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = -\infty; \quad \lim_{\omega\to\omega_0-0} s(\omega) = 2;$$

16.2. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = b$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b$.

16.3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[359]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = ?$

16.4. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.
a) $f(x) = x^3$, $a = 0$; b) $f(x) = \{x\}$, $a = 3$;

16.5. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\}$ nem létezik. Mutassunk példát olyan x_n sorozatra, amire $x \to \infty$ és az $\{x_n\}$ sorozatnak nincs határértéke.

16.6. Igazoljuk, hogy ha $x_n \to a$ és az f függvény folytonos az a pontban, akkor $f(x_n) \to f(a)$.

16.7. Hogy definiálhatjuk függvények limesz szuperiorát és limesz inferiorát (egységesen, környezetekkel)? Mi lehetne a limesz szuperiorra és limesz inferiorra vonatkozó átviteli elv?

Házi feladatok

16.8. Írjuk fel a definíciót kvantorokkal és $\varepsilon, \delta, P, Q$ stb. betűkkel:

$$\lim_{-\infty} f = 1; \quad \lim_{t\to t_0+0} s(t) = 0; \quad \lim_{\zeta\to -0} g(\zeta) = -\infty$$

16.9. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.
a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = \dfrac{1}{25}$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $a = 4$.

16.10. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, akkor f azonosan 0.

16.11. Fogalmazzuk meg a következő, sorozatoknál tanult tételeknek a függvények határértékére és folytonosságára vonatkozó megfelelőit, és igazoljuk az áttviteli elvekkel: határátmenet, rendőr-elv, Cauchy-kritérium, korlátos és 0-hoz tartó sorozat szorzatának 0-hoz tartása.

16.12. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\}$ határértékre.

16.13. Igazold, hogy ha $f \le g$ az α hely egy pontozott környezetében, akkor $\liminf\limits_{\alpha} f \le \liminf\limits_{\alpha} g$ és $\limsup\limits_{\alpha} f \le \limsup\limits_{\alpha} g$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható)feladatok

PM16.1. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és tetszőleges $a > 0$ esetén $f(n \cdot a) \to 0$. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\infty} f = 0$.

PM16.2. Van-e olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek mindenhol ∞ a határértéke?

PM16.3. (a) Ha $0, a_1a_2\ldots$ egy $[0,1]$-beli szám tizedestört alakja, akkor legyen $f(0, a_1a_2\ldots) = \limsup \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{9n}$. Igazoljuk, hogy minden $y \in [0,1]$-re0 $f^{-1}(y)$ sűrű $[0,1]$-ben.

(b) Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ami minden intervallumban minden folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel legalább egy pontban megegyezik.

(c) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden intervallumban minden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel legalább egy pontban megegyezik?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu