21. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 30.

14:05–15:35, Déli tömb 4-713

Emlékeztetőül, második ZH: dec. 12, 8-10 (gyakorlat helyett)

21.1. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ és $\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \ln x = 0$.

21.2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$, $a > 1$ és $K \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to+0} x^{\varepsilon} \cdot \log_a^K x = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a^K x}{x^{\varepsilon}} = 0$.

21.3. Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket, ha $x \to \infty$.

$$\log_2 x \qquad \log_2 \log_3 x \qquad x^{0,1} \qquad 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

21.4.

$$\lim_{x\to+0} e^{\ln x/(\ln|\ln x|)} = ? \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2^x + 3^x} + 4^x}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}} = ?$$

21.5. (a) Igazoljuk, hogy $x > 0$ esetén $\ln x > 1 - \dfrac{1}{x}$.

(b) Mutassuk olyan a valós számot, amire $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $\ln(1 + x) \geq x - ax^2$.

Házi feladatok

21.6.

$$\lim_{x\to+0} x^x = ? \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = ?$$

21.7. Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket, ha $x \to +0$.

$$|\log_2 x| \qquad \log_2 |\log_3 x| \qquad x^{-0,1} \qquad (0,99)^{\sqrt{\log_2 x}}$$

21.8. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

21.9. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, és minden $x, y > 10$-re $(f(x))^{(y^{1/y})} < f(y)$, akkor f-nek van határértéke a ∞-ben, a határérték véges, és nem 0.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható)feladat

PM21.1. Legyenek $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n$ pozitív valós számok, $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Legyen $f(0) = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{w_k}$ (az $a_1, \ldots, a_n$ számok súlyozott mértani közepe), és tetszőleges $p \neq 0$ valós számra legyen $f(p) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k a_k^p\right)^{1/p}$ (a p-edik hatványközép). Mutasd meg, hogy az f függvény folytonos a 0-ban.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu