B. Sc. I. Mat. Intenzív Analízis, 2016/17, I. félév

Pót- és javító ZH, 2016. december 19.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, *amit nagyító nélkül is el tudok olvasni*.

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Ha ebben a félévben tanult tételeket használsz fel, írd oda, hogy melyik az a tétel, és milyen objektumokra alkalmazod.

Várható értékelés:

$$Gy = \max\left(MGy, \min\left(5, \left[0,4 \cdot \max(Z_1, Z_2) + 0,4 \cdot J + 0,2 \cdot R + 0,2 \cdot P + 0,49\right]\right)\right),$$

ahol Gy a gyakorlati jegy, Z_1, Z_2 és J a három ZH-n kapott pontszám, P a megszerzett Pedál Medál pirospontok száma, R a röpzh-k átlaga a legrosszabb 2 nélkül, MGy a megajánlott gyakorlati jegy.

1. Ellenőrizd a folytonosság definícióját az a pontban; adj meg minden $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

(a) $f(x) = [x]$, $a = 3$; (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $a = 3$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 + 2x^3 + 1}}{x} = ?$ (b) $\limsup\limits_{x\to -0} \left\{\dfrac{x^2+1}{x}\right\} = ?$

3. Bizonyítsd be, hogy $n! > \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^n$.

4. Legyen az $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$ számok számtani közepe A. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a_1\sqrt{1-a_1} + \ldots + a_n\sqrt{1-a_n}}{n} \le A\sqrt{1-A}.$$

5. Legyen $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$. Mutasd meg, hogy a

$$p(x) = (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) + (x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n)$$

polinomnak van n különböző valós gyöke.

6. Bizonyítsd be, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden racionális pontban folytonos, akkor kontinuum sok pontban folytonos.

7. Igazold, hogy ha egy rendezett testben igaz a Bolzano-Darboux tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.