2. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. szeptember 28.

2.1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\cos z\,\mathrm{d}z=? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z=?$$

2.2. A $p(z)$ legalább másodfokú polinom gyökei az $|z|<\varrho$ kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges $R>|\varrho|$ esetén

$$I(R)=\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{p(z)}.$$

Igazoljuk, hogy (a) $\big|I(R)\big|\le O(1/R)$; (b) $I(R)$ értéke állandó; (c) $I(R)=0$.

2.3. Legyen a komplex szám. Alakítsuk át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\big|z-a\big|^2\,|\mathrm{d}z|$ integrált, majd számítsuk ki.

2.4. Legyen $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z|=\frac{1}{2}$ körön: cseréljük ki a kört egy $R>1$ sugarú körre (közben alkalmazzuk a Cauchy-formulát az 1 pontban), és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R\to\infty$.

2.5. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z|<1$) belsejében, és $|f|<1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

2.6. Legyen f folyonos függvény a γ rektifikálható görbén. Legyen A görbén kívüli z pontokban minden k nemnegatív egészre legyen

$$g_k(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w.$$

(a) Ellenőrizzük, hogy $g_k'=g_{k+1}$.
(b) Ellenőrizzük, hogy g_k a g_{k+1}-nek integrálfüggvénye.

2.7. *„Az $a_0,a_1,\dots,$ sorozatban $a_0=-1$, és tetszőleges $n\ge 1$-re $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+1}=0$. Igazoljuk, hogy $n\ge 1$ esetén $a_n>0$.”* (IMO Shortlist, 2006/A2)
Oldjuk meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel. Írjuk fel ezplicit alakban az $f(z)=\sum a_nz^n$ függvényt, írjuk fel az együtthatóformulát, és mutassuk meg, hogy

$$a_n=\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2+\log^2(x-1))}.$$

Házi feladatok

2.8. Legyen a és r is pozitív valós szám.

$$\int\limits_{|z|=r}a^z\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{z+1}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n\mathrm{d}z=? \quad (n\in\mathbb{Z})$$

2.9. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}|z-a|^4\,|\mathrm{d}z|=?$

2.10. Az $f(z)$ függvény holomorf a $0 < |z| < 1$ halmazon, és $|f(z)| < \frac{1}{\sqrt{|z|}}$. Mutassuk meg, hogy f-nek van primitív függvénye.

2.11. Igazoljuk, hogy tetszőleges a komplex számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{iax} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-a^2/2},$$

avagy haranggörbe Fourier-transzformáltja is haranggörbe.

2.12. A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Mi a γ görbe 0-ra vonatkozó indexe? (Segítség: bontsuk parciális törtekre az $p'(z)/p(z)$ függvényt.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM2.1. Legyen f olyan polinom, amire igaz az, hogy f' gyökei az egységkör belsejében vannak. Bizonyítsuk be, hogy az egységkörvonal f szerinti képe mindig balfelé kanyarodik, azaz bármely valós t-re $\Big(\arg\Big(\big(f(e^{it})\big)'\Big)\Big)' > 0$.

($\big(f(e^{it})\big)'$ a sebességvektor; $\arg\Big(\big(f(e^{it})\big)'\Big)$ az irány; $\Big(\arg\Big(\big(f(e^{it})\big)'\Big)\Big)'$ az érintőre merőleges gyorsuláskomponens.)

PM2.2. Legyen K rögzített pozitív egész szám. Legyen $(a_0, a_1, \ldots)$ az a számsorozat, amelyre $a_0 = -1$, és bármely n pozitív egészre

$$\sum_{\substack{i_0, i_1, \ldots, i_K \ge 0 \\ i_0 + i_1 + \ldots + i_K = n}} \frac{a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_K}}{i_0 + 1} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy $n \ge 1$ esetén $a_n > 0$.

(KöMal A.661.)

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-kft/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu