## 5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. október 19.

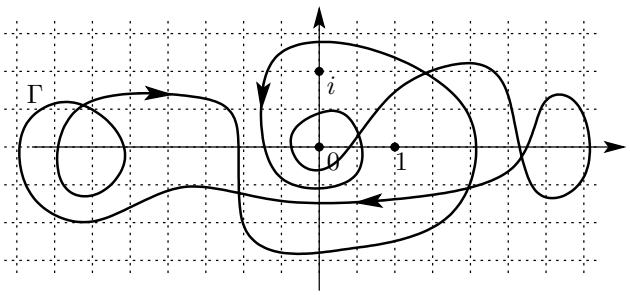
**5.1.** Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? (A $\infty$-ben is lehet!) Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z};\quad \frac{1}{z^2};\quad \frac{1}{z^2+2z};\qquad \frac{1}{\sin z};\quad \sin\frac{1}{z};\quad \frac{e^z}{z^2+4};\quad \frac{e^z}{(z^2+4)^2};$$

**5.2.** Mi a $\dfrac{\operatorname{tg} z}{1-\cos z}$ és a $\dfrac{e^z}{\operatorname{tg} z-\sin z}$ függvények reziduuma a 0-ban?

**5.3.**

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+1} = ? \qquad \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = ?$$




**5.4.** Legyen $f(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$. Ellenőrizzük, hogy

$$\operatorname*{Res}_1 f + \operatorname*{Res}_{-1} f + \operatorname*{Res}_\infty f = 0.$$

**5.5.**

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1} = ?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

**5.6.**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = ?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

### Házi feladatok

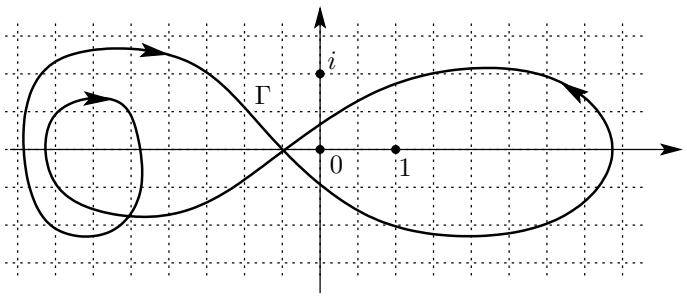
**5.7.** Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{1+e^z};\quad \frac{e^z}{(z^2-1)^3};\quad \frac{e^z-z^3+8}{z^2+1}$$

**5.8.** A reziduumtételből vezessük le, hogy ha $p(z)$ legalább másodfokú polinom, és a gyökei, $\varrho_1,\dots,\varrho_n$ különbözők, akkor $\sum \dfrac{1}{p'(\varrho_k)} = 0$.

**5.9.**

Legyen $f$ egészfüggvény. Fejezd ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\,\mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(\pi/2)$ stb. segítségével.




**5.10.**

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} =? \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_0^\infty \frac{e^{ix}-1}{x}\,\mathrm{d}x =?$$

**5.11.**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} =?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

## Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

**PM5.1.** Legyen $n$ pozitív egész szám, és $\varphi$ egészfüggvény. Tetszőleges $X > 0$ valós szám esetén legyen

$$f(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s)\cdot X^s}{s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-n)}\,\mathrm{d}s.$$

(a) Igazoljuk, hogy $f(X)$ polinom.

(b) Milyen integrálok állítják elő $f$ deriváltjait?

(c) Mutassuk meg, hogy ha $\varphi$ polinom, és $\deg\varphi = k < n$, akkor $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n-k-1)}(1) = 0$ és $f^{(n-k)}(1) \neq 0$, vagyis az $f$-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.

**PM5.2.** A reziduumtétel segítségével igazoljuk, hogy ha $K$ nemnegatív egész, és $a_1, \ldots, a_n$ különböző komplex számok, akkor

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^K}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le n\\ k\neq j}}(a_j-a_k)} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\ge 0\\ k_1+\ldots+k_n=K-n+1}} a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}.$$

(A baloldalon álló szám a $z^K$ függvény osztott differenciája az $a_1, \ldots, a_n$ alappontokon.)