7. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. november 11.

7.1. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan törtlineáris függvényt, ami
(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a 0, 1, ∞ pontok képe rendre 1, ∞, 0,
(b) az egységkört a jobb félsíkba képezi,
(c) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi, illetve
(d) az egységkör felső felét az első síknegyedbe képezi.

7.2. Egy (a) lineáris tört; (b) racionális tört (c) az egész síkon meromorf függvény az egységkörvonalat önmagára képezi. Hogyan helyezkedhetnek el a gyökei és a pólusai?

7.3. Legyen D az egységkör, $f : D \to D$ holomorf, és $a \in D$ az f-nek gyöke. A Schwarz-lemmából és közvetlenül is mutassuk meg, hogy $\big|f(z)\big| \le \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$.

7.4. Az $f(z)$ függvény holomorf a nyílt egységkörlapon, és $|f| \le 1$. A függvény gyökei $w_1, w_2, \ldots$ (lehet végtelen sok is). Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \le \prod_j |w_j|$.

7.5. Legyen $B(a,z) = \begin{cases} z & \text{ha } a = 0 \\ \dfrac{|a|}{a} \cdot \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} & \text{ha } a \neq 0. \end{cases}$ Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy sorozat az egységkörben, és vizsgáljuk a $\prod_{n=1}^{\infty} B(a_n, z)$ *Blaschke-szorzat*ot.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $\sum \big(1 - |a_n|\big) < \infty$, akkor a $\sum \big|1 - B(a_n, z)\big|$ sor lokálisan egyenletesen konvergál, emiatt a Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen tart egy nem konstans, holomorf $D \to D$ függvényhez, amelynek gyökei éppen az $a_1, a_2, \ldots$ számok.

(b) Mutassuk meg, hogy ha $\sum \big(1 - |a_n|\big) = \infty$, akkor a Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen tart a konstans 0 függvényhez.

Házi feladatok

7.6. A kitevőben levő függvény 0-, ∞- és 1-beli értéke alapján, további számolás nélkül, pusztán a törtlineáris függvények és az exponenciális függvény ismert tulajdonságai alapján mutasd meg, hogy $\big|e^{(z+1)/(z-1)}\big| < 1 \quad (|z| < 1)$.

7.7. Adott a komplex síkon egy K körvonal, rajta kívül egy p pont. Bizonyítsd be, hogy ha f olyan törtlineáris függvény, amire $f(K) = K$ és $f(p) = p$, akkor $|f'(p)| = 1$.

7.8. Egy konform leképezés a felső félsíkra képez egy szabályos háromszöglemezt úgy, hogy a három csúcs képe 0, 1, illetve ∞. Mi lehet a háromszög középpontjának képe? (Használd az 1.a feladatot.)

7.9. (a) A középérték-tulajdonságból vezesd le, hogy ha $|a| > 1$, akkor $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|z|=1} \log|z-a|\,|\mathrm{d}z| = \log|a|$.

(b) Törtlineáris függvények segítségével igazold, hogy ha $|a| < 1$, akkor $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|z|=1} \log|z-a|\,|\mathrm{d}z| = 0$.

7.10. Legyen $P(x)$ olyan nemkonstans valós polinom, amelyre $p(\cos t)^2 + p(\sin t)^2 = 1$. Mutasd meg, hogy $p(x) = \pm T_k(x)$ valamilyen páratlan pozitív egész k-val. (Keresd meg ebben a Blaschke-szorzatot.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM7.1. Igazold az egyváltozós komplex implicitfüggvény-tételt:

Legyen $f(z,w)$ kétváltozós, folytonosan differenciálható komplex függvény, és legyen $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ az $f(z,w) = 0$ egyenlet egy olyan megoldása, amelyre $\partial_2 f(a,b) \neq 0$. Mutassuk meg *komplex függyénytani eszközökkel*, hogy alkalmas $r_1, r_2 > 0$ számokkal a következők teljesülnek:

(1) Minden $z \in B(a,r_1)$-hez pontosan egy olyan $w \in B(b,r_2)$ létezik, amire $f(z,w) = 0$, tehát létezik egy egyértelmű $\omega : B(a,r_1) \to B(b,r_2)$ implicit függvény, ami megoldása az $f(z,\omega(z)) = 0$ egyenletnek.

(2) Az $\omega(z)$ függvény holomorf;

(3) $\omega'(a) = -\dfrac{\partial_1 f(a,b)}{\partial_2 f(a,b)}$.

PM7.2. (a) Legyen $p(z)$ nem konstans, komplex együtthatós polinom. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

(1) Ha p minden gyökének nemnegatív a valós része, és $\operatorname{Re} z < 0$, akkor $\operatorname{Re} \dfrac{p'(z)}{p(z)} < 0$.

(2) Ha $p(z)$ gyökei a $\operatorname{Re} z' \geq 0$ félsíkba esnek, akkor $p'(z)$ gyökei is.

(3) Ha $p(z)$ nem konstans komplex polinom, akkor p' gyökei a p gyökeinek konvex burkába esnek. (Gauss-Lucas tétel)

(b) Legyen D az egységkörlemez, amit azonosítunk a Poincaré-féle körmodellel, $a_1, \ldots, a_n \in D$, és legyen $p(z) = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$ olyan véges Blaschke-szorzat, amelynek gyökei az $a_1, \ldots, a_n$ számok. Bizonyítsd be, hogy $p'(z)$-nek multiplicitással számolva pontosan $n-1$ gyöke van D belsejében, és ezek a gyökök az $a_1, \ldots, a_n$ pontoknak a körmodellben vett konvex burkába esnek.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-kft/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu