A prímszámtétel

Jelölések, definíciók

$$s=\sigma+it \qquad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad (\sigma>1) \qquad \Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{ha } n=p^\alpha\\ 0 & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány}\end{cases}$$

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1 \qquad \vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p \qquad \psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n) \qquad M(x)=\sum_{n\le x}\mu(n) \qquad \operatorname{li} x=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

A prímszámtétel néhány ekvivalens formája

1. $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x}$; $\quad\pi(x)\sim\operatorname{li}x$; $\quad\vartheta(x)\sim x$; $\quad\psi(x)\sim x$; $\quad\dfrac{M(x)}{x}\to 0$; $\quad\sum_{n\le x}\left(1-\dfrac{n}{x}\right)\Lambda(n)\sim\dfrac{x}{2}$

A ζ-függvény

2. A $\sigma>1$ félsíkban

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}, \qquad \frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \text{és} \qquad \frac{\zeta'}{\zeta}(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

3. Ha $\sigma>1$, akkor

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}\right),$$

és ez a sor kiterjeszti a $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ függvényt a jobb félsíkra.

4. Ha $\frac{1}{2}<c<1$, akkor a $\sigma>c$, $|t|>3$ halmazon

$$\zeta(s)=\sum_{n\le t^2}\frac{1}{n^s}+O(1).$$

Ebből következik, hogy $|t|>3$, $\sigma>1-\dfrac{1}{\log|t|}$ esetén $|\zeta(s)|=O(\log|t|)$ és $|\zeta'(s)|=O(\log^2|t|)$.

5. $3+4\cos x+\cos 2x\ge 0$.

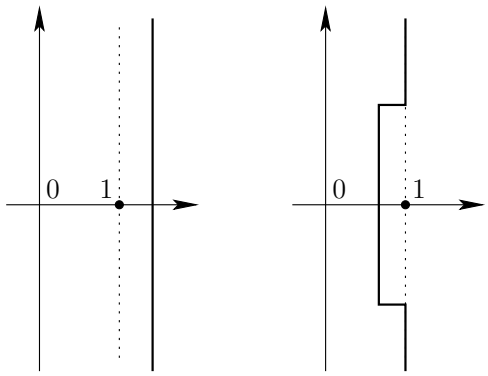
6. Vizsgáljuk meg a $-\dfrac{\zeta'}{\zeta}$ függvény valós részét a σ, $\sigma+it$, $\sigma+2it$ pontokban. A ζ-függvénynek az $1+it$ legfeljebb 3/4-szeres gyöke lehet. :-)

7. $\dfrac{1}{|\zeta(1+it)|}\le O(\log^c|t|)$.

A prímszámtétel egy bizonyítása

8. Ha $\sigma_0>1$ és $x>1$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\sum_{n\le x}\left(1-\frac{n}{x}\right)\Lambda(n).$$



Változatok: $\dfrac{x^s}{s}$; $\dfrac{x^s}{s^2}$ stb.

9. $\sum_{n\le x}\left(1-\dfrac{n}{x}\right)\Lambda(n)\sim\dfrac{x}{2}$.