Matematika problémamegoldó szeminárium, 2016. május 3.

1. (a) Igaz-e. hogy minden $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcióra a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot f(n)}$ sor konvergens?

(b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, amire a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + f(n)}$ sor konvergens.

2. Legyen a és b két, relatív prím pozitív egész. Melyik az a legkisebb pozitív egész, ami nem áll elő $ax+by$ alakban, alkalmas x, y pozitív egészekkel?

3. Legyen A és B két komplex mátrix, amelyekre $AB - BA = B^2$. Mutassuk meg, hogy $AB = BA$.

4. Igaz-e, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots$ valós sorozatban $(a_{n+1} - a_n) \to 0$ és $(a_{2n} - 2a_n) \to 0$, akkor $a_n \to 0$?

5. Igazoljuk, hogy vannak olyan c_1 és c_2 pozitív számok, hogy

(a) minden $k > 1$ valós számra $\displaystyle\left| \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos(kx)\, \mathrm{d}x \right| < \frac{c_1}{k^{3/2}}$;

(b) minden $k > 1$ valós számra $\displaystyle\left| \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sin(kx)\, \mathrm{d}x \right| > \frac{c_2}{k}$.

6. Legyen A és B két, egész számokból álló $n \times n$-es mátrix úgy, hogy az $A, A+B, A+2B, \ldots, A+2nB$ mátrixok mind invertálhatóak, és az inverzeik is egész számokból állnak. Mutassuk meg, hogy ekkor az $A + (2n+1)B$ mátrix is invertálható, és az inverze egészekből áll.

7. Egy n pozitív egészt furcsának nevezünk, ha $\sigma(n) \geq 2n$ és n nem áll elő néhány különböző pozitív osztójának összegeként. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok furcsa szám van.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik téglalapoknak egy $T_1, T_2, \ldots$ sorozata, amelyek lefedik f grafikonját, és a rövidebbik oldalaik összege kisebb, mint ε. (A téglalapok oldalai nem feltétlenül tengelypárhuzamosak.)

9. (Írásban, angolul beadható.) Suppose that we have a countable set A of balls and a unit cube in $\mathbb{R}^3$. Assume that for every finite subset B of A it is possible to put all balls of B into the cube in such a way that they have disjoint interiors. Show that it is possible to arrange all the balls in the cube so that all of them have pairwise disjoint interiors.