1. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. február 15.

Az előadás kurzustájékoztatója: `http://www.cs.elte.hu/~buczo/edu/mftaj201702.pdf`

Várható ZH időpontok: március 21. (előadás helyett, de külön időpontban, a haladó csoportokkal közös feladatsorral), május 10. (gyakorlaton).

Osztályozás: gyakorlati jegy $\approx \dfrac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R} + P}{5} \pm M$, ahol Z_1 és Z_2 a két ZH pontszám, $\overline{R}$ a 4–7 röpdolgozat átlaga a legrosszabb nélkül, P a megszerzett Pedál Medál Pirospontok száma, M az órai munka (a.k.a. pofafaktor). Javítási lehetőség: a pót ZH-n (várható időpont: december 19.).

A gyakorlatokon való részvétel kötelező. Ha valaki a gyakorlatok negyedénél többről hiányzik, akkor csak rendkívüli, igazolt esetben, többletfeladatok teljesítése után kaphat gyakorlati jegyet. Ha valaki a gyakorlatoknak több mint a harmadánál többről hiányzik, akkor egyáltalán nem kaphat gyakorlati jegyet.

Bővebb tájékoztató az intenzív gyakorlatokról:
`http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/Tajekoztato.html`

1.1. A derivált definícióját használva adjuk meg $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x}$ deriváltját.

1.2. Deriváljuk a következő függvényeket:

$$(|x|+1)\ln|x|; \qquad 3x^2\sin x - 2\cos x + 1; \qquad \frac{x^2+1}{\log_3|x|+2}; \quad (x^{10}+x^2+1)^{100} \quad \sin x^2 \quad x^{\operatorname{tg} x}$$

1.3. Legyen $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Hol differenciálható a függvény? Mi a deriváltja? Hol folytonos a derivált függvény?

1.4. A $8x + \cos x$ függvény szig. mon. nő. Mi az inverzének a deriváltja az 1-ben?

1.5. (a) Mutassuk meg, hogy $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

(b) Az inverz függvény differenciálási szabálya segítségével mutassuk meg, hogy

$$(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\operatorname{ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (\operatorname{ar\,cth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

(Ezeket a formulákat meg kell jegyezni!)

(c) Hogy lehetséges az, hogy $(\operatorname{ar\,th} x)' = (\operatorname{ar\,cth} x)'$??

1.6. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenhol differenciálható. Igazoljuk, hogy ha f páros, akkor f' páratlan, illetve ha f páratlan, akkor f' páros.

1.7. Legyen $a, b > 0$. Bizonyítsd be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ görbék merőlegesen metszik egymást.

1.8. (a) Deriváljuk az $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x \neq 1)$ azonosság mindkét oldalát.

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = ? \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k} = ? \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{2^k} = ?$$

1.9. Számítsuk ki a Csebisev-polinomok ($T_n(\cos t) = \cos nt$, illetve $U_n(\cos t)\sin t = \sin(n+1)t$) deriváltját az 1-ben. $T_n'(1) = ?$ $\quad U_n'(1) = ?$

Házi feladatok

1.10. Deriváld a következő függvényt. (Ne rendezd. Csak deriváld.)

$$\frac{(x^2+\cos x)(2-\operatorname{cth} x)}{x^3 \operatorname{ar\,th} x + 2}$$

1.11. Mutassuk meg a differenciálási szabályokat használva, hogy $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$.

1.12. Hol differenciálható az $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ függvény? Mi a deriváltja?

1.13. Az x^x függvény szig. mon. nő az $[1,\infty)$ intervallumban. Mi az inverzének a deriváltja a 27-ben?

1.14. Mutassuk meg, hogy a $x^2 = 4cy$ egyenletű parabola alakú tükör az y-tengellyel párhuzamos egyeneseket a $(0,c)$ fókuszponton keresztül veri vissza.

1.15. Legyen $a > b > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{4a(a-x)}$ és $\sqrt{4b(b+x)}$ függvények grafikonjai merőlegesen metszik egymást.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM1.1. Tegyük fel, hogy f differenciálható $\mathbb{R}$-en. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik egy olyan, folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló $g_1, g_2, \ldots$ sorozat, ami „pontonként tart az f' függvényhez”, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re $g_n(x) \to f'(x)$. (Ezt hívják a derivált Baire-1 tulajdonságának.)