## 2. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. február 22.

**2.1.** Hányadik deriváltról van szó?

„*Csökkent az infláció növekedésének dinamizmusa.*” (Antall József miniszterelnök, 1992(?).)

„*Lassult a gazdasági folyamatok növekedésének dinamikája.*” (Hegedűs Éva helyettes államtitkár, 2001.)

**2.2.** A Lagrange-középértéktételből vezessük le, hogy $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \le |x-y|$, teljesül $\forall x, y \in \mathbb{R}$-re.

**2.3.** A Rolle-középértéktétel segítségéval bizonyítsuk be, hogy az $x^7 + 8x^2 + 5x - 23 = 0$ egyenletnek legfeljebb három különböző gyöke van.

**2.4.** Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \ge 0$-re $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

**2.5.** Tegyük föl, hogy $f$ differenciálható $\mathbb{R}$-en, és $f' = f$. Mutassuk meg, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = ce^x$.

**2.6.** Egy $a \times b$ méretű papírból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a sarkaiból levágunk egy-egy $c \times c$-es négyzetet, és az oldalakat felhajtjuk. Hogyan válasszuk meg a $c$ értékét, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

**2.7.** Mi az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$ függvény értékkészlete?

**2.8.** Függvényvizsgáljuk az $\frac{e^x}{1-x^2}$ függvényt.

**2.9.** Határozzuk meg az $x^3 - 2x^2 + x - 2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

**2.10.** Legfeljebb hány különböző nullhelye lehet az $f(x) = e^x - p(x)$ függvénynek, ha $p$ egy $n$-edfokú polinom?

### Házi feladatok

**2.11.** Mutassuk meg, hogy ha $f$ és $g$ differenciálható $[a, b]$-ben, $f(a) \ge g(a)$, és $\forall x \in [a, b]$-re $f'(x) \ge g'(x)$, akkor $\forall x \in [a, b]$-re $f(x) \ge g(x)$.

**2.12.** Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f^{(6)}(x) = 0$ teljesül $\forall x \in \mathbb{R}$-re.

**2.13.** Igazoljuk, hogy ha $f$ differenciálható $\mathbb{R}$-en, és $f'$ korlátos, akkor $f$ Lipschitz.

**2.14.** Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \ge 0$-re $x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

**2.15.** (a) Igazoljuk, hogy ha $f$ kétszer differenciálható a $[0, 2]$ intervallumban, és $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (0, 2)$, amire $f''(\xi) = 0$.

(b) Igazoljuk, hogy ha $f$ kétszer differenciálható a $[0, 2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0, 2)$, amire $f''(\xi) = f(0) - 2f(1) + f(2)$.

**2.16.** Függvényvizsgáljuk az $\sqrt[x]{x}$ függvényt.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

**PM2.1.** Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$, és $0 < x < \pi$, akkor $\frac{\sin ax}{\sin x} > ae^{\frac{1-a^2}{6}x^2}$.

**PM2.2.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n$ pozitív egész számra és $x > 0$-ra

$$\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{x}} - \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{x+3}} + - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{x+n}} > 0.$$

**PM2.3.** Általánosítsuk a Lagrange-középértéktételt $n+1$ alappontra és $n$-edik deriváltra.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu