3. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. március 1.

3.1. (a) Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ függvény szigorúan konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le a, b \le 1$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

3.2. (a) Igazoljuk, hogy ha $a_1, \ldots, a_n > 0$ és $x_1, \ldots, x_1 > 0$, akkor

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n}.$$

(A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség „Engel-féle alakja")

(b) Mi lehetne a Hölder-egyenlőtlenség "Engel-féle alakja"?

3.3. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 1$, akkor

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2}.$$

(Ír versenyfeladat, 1999)

3.4. Egy-egy alkalmas függvény differenciálásával számítsuk ki a következő határértékeket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x + e^x - 2}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\log_2(1+x)}$$

3.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = ? \quad \lim_{x\to 1} \left((x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right) = ? \quad \lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = ?$$

3.6. Gondoljuk meg, hogy a következő határértékek meghatározásában nem alkalmazható közvetlenül a L'Hospital-szabály. Miért nem? Léteznek-e a megadott határértékek?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

3.7. Legyen f egy n-szer differenciálható függvény. Az f *osztott differenciáit az* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *alappontokon* így jelöljük és definiáljuk:

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0); \\
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &= \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \qquad \text{ha} \quad x_{n-1} \ne x_n; \\
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &= f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, t]' \Big|_{t = x_n} \qquad \text{ha} \quad x_{n-1} = x_n.
\end{aligned}$$

(a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f[x, y, z] = ?$

(b) Legyen I intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor konvex, ha bármely $a, b, c \in I$ különböző számokra $f[a, b, c] \ge 0$.

(c) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható, $x \le y \le z$, és $x \ne z$, akkor létezik olyan $\xi \in (x, z)$, amire $\dfrac{f''(\xi)}{2} = f[x, y, z]$. Segítség: illesszünk legfeljebb másodfokú polinomot az $\big(x, f(x)\big)$, $\big(y, f(y)\big)$, $\big(z, f(z)\big)$ pontokra.

(d) Mi $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ értéke, ha $f(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom?

(e) Bizonyítsuk be, hogy az osztott differencia nem függ az $x_0, \ldots, x_n$ számok sorrendjétől.

(f) Igazoljuk, hogy ha f n-szer differenciálható, és az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok nem mind egyenlők, akkor

$$\exists \xi \in \big(\min x_i, \max x_i\big) \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

(Az osztott differenciákra vonatkozó középértéktétel.)

Házi feladatok

3.8. Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin\sqrt{xy}$, vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$? (Írjuk fel a Jensen-egyenlőtlenséget egy alkalmas függvényre.)

3.9.

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x} =? \quad \lim_{x\to 0}\frac{2e^x + e^{-x} - 3}{\sin 2x + x^2 + \operatorname{sh} x} =? \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos ax}{\log\operatorname{ch} bx} =? \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} =? \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^{-2}} =?$$

3.10. Általánosítsuk a Hölder-egyenlőtlenséget kettő helyett k szám n-esre.

3.11. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 2$, akkor

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^{3/2}}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^{3/2}}{\sqrt{d+a}} \geq \sqrt{2}.$$

3.12. Az x, y, z pozitív számokra $xyz = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO feladatjavaslat, 1998)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM3.1. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\det\begin{pmatrix} e^{a_1 b_1} & e^{a_1 b_2} & \ldots & e^{a_1 b_n} \\ e^{a_2 b_1} & e^{a_2 b_2} & \ldots & e^{a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_n b_1} & e^{a_n b_2} & \ldots & e^{a_n b_n} \end{pmatrix} > 0.$$

PM3.2. Általánosítsuk a Cauchy-középértéktételt $n + 1$ alappontra és n-edik deriváltakra.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`