4. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. március 8.

4.1. Írjuk fel az $f(x) = \log(1+x)$ függvény 0 körüli n-edik Taylor polinomját. A Lagrange-maradéktag segítségével adjunk felső becslést arra, hogy mekkora hibát követünk el akkor, ha a $[0, 0.5]$ intervallumon az ötödik Taylor polinommal közelítjük f-et.

4.2. Mi a kapcsolat a deriváltak Taylor-polinomjai és a Taylor-polinomok deriváltjai között?

4.3. (a) Ellenőrizzük, hogy a Taylor-maradéktagra igaz, hogy

$$R_n(x) = f[\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n+1}, x] \cdot (x-a)^n,$$

ahol $f[\ldots]$ az osztott differenciát jelenti.

(b) Vezessük le a Lagrange-maradéktagos Taylor-formulát az osztott differenciák középértéktételéből.

4.4. $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x =$? Mi a $(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összeg?

4.5. Mennyi a Dirichlet- és a Riemann-függvény alsó és felső integrálja $[0, 1]$-ben?

4.6. Számítsuk ki az $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ Riemann-integrált a definícióból. (Válasszunk olyan felosztást, amikor az osztópontok mértani sorozatot alkotnak.)

4.7. Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan δ-t, hogy ha Φ az $[0, \pi/2]$ intervallum egy δ-nál finomabb felosztása, és σ a $\sin x$ függvénynek egy Φ-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $\left|\sigma - \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

4.8. Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, akkor

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \le \underline{\int_a^b} (f+g) \le \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} (f+g) \le \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mutassunk példát olyan f, g függvényekre, amikor egyik egyenlőtlenségben sem áll egyenlőség.

Házi feladatok

4.9. Az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvényre felírt Taylor-formulából számítsuk ki $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}$ és $\pi = 4(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3})$ értékét 2 tizedesjegy pontossággal.

4.10. Számítsd ki az $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$ integrált a definícióból.

4.11. Igazoljuk, hogy ha egy $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz, akkor integrálható.

4.12. Mi lehetne az integrálközelítő összegekre vonatkozó Cauchy-kritérium?

4.13. Igazoljuk, hogy ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-ben, akkor van olyan pont, ahol folytonos.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM4.1. Előadáson a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktagos formáját úgy bizonyítottuk, hogy az $\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}$ törtre $(n+1)$-szer alkalmaztuk a Cauchy-középértéktételt. Milyen függvényt írjunk a tört nevezőjében az $(x-a)^{n+1}$ függvény helyére, hogy ugyanez a bizonyítás a Cauchy-féle maradéktagot adja?

PM4.2. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ és $f(1) = 1$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\xi \in (0, 1)$ valós szám, amire $f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$. (IMC 1998)

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu