B. Sc. I. Mat. Intenzív Analízis, 2016/17, II. félév

Első ZH, 2017. március 21.

Kérjük, hogy minden beadott lapra írd rá a nevedet és a gyakorlatvezetőd nevét.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges. Előadáson szerepelt tételek, illetve a gyakorlaton bizonyított állítások bizonyítás nélkül felhasználhatóak. Egyéb állításokra nem elég hivatkozni, hanem bizonyítást is kell adni, a tanult anyag felhasználásával.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1. Differenciáld a következő függvényeket:

$$(a)\quad \frac{\arcsin\big(\log(x^3-1)\big)}{\operatorname{tg} x};\qquad (b)\quad \big(\operatorname{ar\,sh}(x^2)\big)^{\log(\log x)}.$$

2. Mutasd meg, hogy $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = P_{n+1}(\operatorname{tg} x)$, ahol P_{n+1} egy $(n+1)$-edfokú polinom.

3. Határozd meg az $x, y > 0$, $xy = 1$ hiperbolaág és az $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ pont távolságát.

4. Végezz teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x-3}$ függvényen, és ábrázold vázlatosan a grafikonját.

5. Számítsd ki a következő határértékeket:

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

6. Legyen $|x| < \dfrac{\pi}{2}$. Melyik nagyobb, $\dfrac{\sin x}{x}$ vagy $e^{-x^2/6}$?

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Igazold, hogy van olyan $\xi \in \mathbb{R}$ pont, ahol $f''(\xi) = 0$.