5. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. március 22.

5.1. Mely állítások igazak tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre?

(a) Ha f korlátos, akkor Riemann-integrálható.
(b) Ha f korlátos, akkor van primitív függvénye.
(c) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor integrálható.
(d) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor nem integrálható.
(e) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor korlátos.
(f) f-nek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha az integrálfüggvénye primitív függvény.
(g) Ha f integrálható és az integrálfüggvénye differenciálható, akkor az integrálfüggvény deriváltja azonos f-fel.
(h) Ha f monoton nő, akkor az integrálfüggvénye konvex.
(i) Ha f integrálfüggvénye konvex, akkor f monoton.
(j) Ha f Darboux-tulajdonságú, akkor van primitív függvénye.

5.2. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények a megadott intervallumokon? Ha igen, mutassunk ε-hoz δ-t. Ha nem, mutassunk ε-t, amihez nincs δ.

$$\sqrt{x}, \quad (0, \infty); \qquad \sin\frac{1}{x}, \quad (0, 1); \qquad x \sin\frac{1}{x}, \quad (0, 1).$$

5.3. (a) Igaz-e, hogy ha f egyenletesen folytonos (a, b)-n akkor korlátos?

(b) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is az?

(c) Igaz-e, hogy ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ és $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is az?

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} =?$

5.5. Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, és $f : [0, 1] \to [c, \infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n) \cdot f(2/n) \cdot \ldots \cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0, 1] \to (0, \infty)$ függvény esetén?

5.6. Legyen $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$ Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

5.7. Adjuk meg a $[-2, 3]$ intervallumon az alábbi függvények összes primitív függvényét, integrálfüggvényét, határozatlan integrálját és határozott integrálját!

$$|x|; \qquad \operatorname{sgn} x; \qquad 1 + x^2 \operatorname{sgn} x$$

5.8. Legyen $f_1(x) := \displaystyle\int_0^x \log(1 + t^2)\, \mathrm{d}t$, ha $x \geq 0$. $f_1'(x) =?$

5.9. Mutassunk példát olyan Riemann-integrálható $[0, 1] \to [0, 1]$ függvényekre, amelyeknek a kompozíciója nem Riemann-integrálható.

Házi feladatok

5.10. Mely állítások igazak tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre?
(a) Ha f integrálható, akkor van primitív függvénye.
(b) Ha f integrálható, akkor nincs primitív függvénye.
(c) Ha f integrálható, akkor korlátos.
(d) Ha f integrálható, akkor Darboux-tulajdonságú.
(e) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor Darboux-tulajdonságú.
(f) Ha f primitív függvénye konvex, akkor f monoton.
(g) Ha f integrálfüggvénye konvex, akkor f értékét megszámlálható sok pontban megváltoztathatjuk úgy, hogy monoton legyen.
(h) Ha f Darboux-tulajdonságú és integrálható, akkor van primitív függvénye.

5.11. Legyen $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Melyik állítás következik a másikból?
(a) f Lipschitz. (b) f egyenletesen folytonos. (c) f folytonos. (d) f korlátos.
(e) f-nek van véges féloldali határértéke az intervallum végpontjaiban.

5.12. Bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható az I intervallumban és itt f' korlátos, akkor f egyenletesen folytonos I-n.

5.13. Igaz-e, hogy ha f egyenletesen folytonos (a, b)-n, akkor véges féloldali határértéke van az a és b pontokban?

5.14. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

5.15. Legyen $f_2(x) := \displaystyle\int_1^{x^2} e^{\sin t}\, \mathrm{d}t$, ha $x \geq 0$. $f_2'(x) =?$

5.16. Van-e olyan függvény, aminek a $\sqrt{|x|}$ (a) integrálfüggvénye; (b) primitív függvénye?

5.17. Bizonyítsuk be, hogy ha f integrálható $[a, b]$-n, akkor van olyan pont, ahol folytonos.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM5.1. Igazoljuk, hogy ha egy $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és csak véges sok pontban szakad, akkor Riemann-integrálható.