6. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. március 29.

6.1. Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to [c, \infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n) \cdot f(2/n) \cdot \ldots \cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1] \to (0, \infty)$ függvény esetén?

6.2. Legyen $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$ Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

6.3. Legyen $f_1(x) := \displaystyle\int_0^x \log(1+t^2)\,\mathrm{d}t$, ha $x \geq 0$. $f_1'(x) = ?$

6.4.

$$\int (1+x+x^2)\,\mathrm{d}x = ?; \qquad \int_0^1 (1+x+x^2)\,\mathrm{d}x = ?; \qquad \int \left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = ?; \qquad \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = ?;$$

6.5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad \int_0^1 \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{3/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x$$

6.6. Számítsuk ki parciális integrálással:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x \quad \int_0^\pi (x^2+2x)\cos x\,\mathrm{d}x \quad \int_1^e 1 \cdot \log^2(x)\,\mathrm{d}x$$

6.7. Számítsuk ki lineáris helyettesítéssel:

$$\int \operatorname{ctg}(2-3x)\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x+x^2}} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-1+x+x^2}} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

6.8. Alakítsuk $\int f^\alpha \cdot f'$ vagy $\int (f \circ g) \cdot g'$ alakúvá, és számítsuk ki:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\log^3 x}{x}\,\mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \sqrt{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{-2x}-1}} \quad \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{\log\log x}{x}\,\mathrm{d}x$$

6.9. Számítsuk ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált a $x = \sin u$, illetve $x = \cos v$ helyettesítésekkel. Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény ugyanaz.

Házi feladatok

6.10. Igazoljuk, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

6.11. Legyen $f_2(x) := \int_1^{x^2} e^{\sin t}\, \mathrm{d}t$, ha $x \geq 0$. $f_2'(x) =?$

6.12.

$$\int_0^1 x^3\, \mathrm{d}x =?; \qquad \int x^3\, \mathrm{d}x =?; \qquad \int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x =? \qquad \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x =?$$

6.13. Legyen $g(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{\sin t} dt$, ha $x \geq 0$. $g(x) =?$

6.14.

$$\int \operatorname{ar\,cth} x\, \mathrm{d}x \quad \int_1^e \log^3(x)\, \mathrm{d}x \quad \int e^{ax} \cos x\, \mathrm{d}x \quad \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x \quad \int \left(\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x; \quad \int_{1/4}^{3/4} \sqrt{x} \operatorname{arc\,sin}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x \quad \int \sin x \cdot \log(\operatorname{tg} x)\, \mathrm{d}x \quad \int e^{ax} \cos(bx) \sin(cx)\, \mathrm{d}x$$

6.15. Írjuk fel összeg helyett Riemann-integrállal a következőket: számtani közép, mértani közép, p-edik hatványközép, súlyozott p-edik hatványközép, súlyozott hatványközepek közötti egyenlőtlenségek, Jensen-egyenlőtlenség, Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Hölder-egyenlőtlenség.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM6.1. Legyen $f, g \in R([a,b])$, egy-egy integrálfüggvényük F, illetve G. Bizonyítsd be, hogy

$$\int_a^b F \cdot g = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b f \cdot G.$$

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`