8. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. április 19.

8.1. Egy egyenes körhengert elmetszünk egy síkkal, ami illeszkedik az egyik alapkör középpontjára, és érinti a másik alapkört. Milyen arányban osztja ketté ez a sík a henger térfogatát?

8.2. A szinuszfüggvény grafikonjának 0 és π közötti ívét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így kapott, szivar alakú test térfogata?

8.3. Számítsuk ki az $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ cikloisív alatti területet és a cikloisív hosszát.

8.4. Számítsd ki az $r(\varphi) = 1 - \varphi^2$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ polárkoordinátás alakban megadott görbe hosszát.

8.5. Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetén

$$\frac{e^{-a}}{a+1} < \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{e^{-a}}{a}.$$

8.6.

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^1 \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = ? \qquad \int_1^\infty \frac{x\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

8.7. Milyen a, b, c valós számokra konvergens?

$$\int_0^1 (\operatorname{tg} x)^c\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 |\log x|^{|\log x|^c}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{arc\,cos} x)^c} \qquad \int_0^{\pi/2} (\sin x)^a (\cos x)^b\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^c}\,\mathrm{d}x$$

8.8. Igaz vagy hamis?

(a) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor f korlátos.

(b) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\lim_\infty f = 0$, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

(c) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, $\lim_\infty f = 0$, és f integrálfüggvénye korlátos, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

8.9. Az $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényre $f(0) = 1$, $f'_+(0) = -a < 0$ és $x > 0$ esetén $f(x) < 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\int_0^1 f^k \sim \frac{1}{ak}$ ha $k \to \infty$.

(Segítség: a 0 közelében becsüljük a függvényt alulról és felülről az e^{-cx} alakú függvényekkel.)

Házi feladatok

8.10. Mekkora a tórusz térfogata és felszíne?

8.11. Milyen hosszú a $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának a $(0,1)$ és az $(a, \operatorname{ch} a)$ pont közötti íve?

8.12. Számítsd ki az $r(\varphi) = 1 - \varphi^2$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ polárkoordinátás alakban megadott görbe által határolt területet.

8.13. Számítsuk ki a gömböv ($x \in [a,b]$, $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$) felszínét.

8.14. Igaz vagy hamis?

(a) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\lim_\infty f = 0$.

(b) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf_\infty f = 0$.

(c) Ha $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\limsup_\infty f = 0$.

(d) Ha $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf_\infty f = 0$.

(e) Ha $f \geq 0$, akkor az $\int_\alpha^\beta f$ improprius integrál biztosan létezik.

8.15. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < b$, akkor $\left|\int_a^b \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{a}$. (Integráljuk parciálisan.)

(b) Bizonyítsuk be, hogy az $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens.

(c) Abszolút konvergens-e az $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ integrál?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM8.1. (a) Mi a kapcsolat az n-dimenziós, r sugarú gömb térfogata és az $\int_0^\pi (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$ integrál között?

(b) Mennyi legyen a δ-dimenziós, r sugarú gömb térfogata, ha $\delta > 0$ valós szám?