

## 9. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. április 26.

9.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} =? \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =?$$

9.2. Mik azok a  $c$  valós számok, amikre az

$$\int_0^1 \left( \frac{\operatorname{ar\,th} x}{x^2} \right)^c dx$$

integrál konvergens?

9.3. Legyen  $a > 0$ . Keressünk alsó és felső becsléseket  $\int_a^{\infty} e^{-x^2} dx$ -re.

9.4. Számítsuk ki a következő Riemann-Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^3 x^2 d[e^x]; \quad \int_0^1 \{x\} d(\sin \pi x)$$

9.5. Mi a  $\{x\}$  függvény totális variációja a  $[0, 3]$  intervallumban?

9.6. Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Melyik állításból melyik következik?

- (a)  $f$  grafikonja rektifikálható.    (b)  $f$  korlátos változású.    (c)  $f$  folytonos.    (d)  $f$  korlátos.  
 (e)  $f$  monoton.    (f)  $f$  Lipschitz.    (g)  $f$  két monoton függvény összege.

9.7. Legyen  $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$  a prímek száma  $x$ -ig, és  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  a prímek logaritmusösszege. Írjuk át ezeket az összegeket Riemann-Stieltjes integrállá, integráljunk parciálisan, és igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

- (a)  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ , ha  $x \rightarrow \infty$ ;    (b)  $\vartheta(x) \sim x$ , ha  $x \rightarrow \infty$ .

### Házi feladatok

9.8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} =?$$

9.9. (a) Bizonyítsd be, hogy az  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin e^x dx$  integrál konvergens.

- (b) Bizonyítsd be, hogy  $0 < a$  esetén  $\left| \int_a^{\infty} \sin e^x dx \right| < 2e^{-a}$ .

9.10. Igazoljuk, hogy ha  $f > 0$ , és az  $\int_3^{\infty} f$  improprius integrál konvergens, akkor az

$$\int_3^{\infty} (f(x))^{1 - \frac{1}{\log x}} dx$$

integrál is konvergens.

9.11. Legyen  $a_1, a_2, \dots$  pozitív valós számok egy olyan sorozata, amire

$$\exists c > 0 \quad \forall x > 2 \quad |\{k : a_k < x\}| < c \frac{x}{\log^2 x}.$$

(Ilyenek például az ikerprímek, ha tényleg végtelen sokan vannak.) Bizonyítsd be, hogy  $\sum \frac{1}{a_k}$  konvergens.

9.12. Hogyan definiálhatnánk az  $\int_a^b f \cdot |dg|$  integrált? Mondjunk elégséges feltételeket a létezésére!

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

**PM9.1.** A síkon az origó közepű,  $R \geq 1$  sugarú körbe eső rácspontok száma  $R^2\pi + O(R^\vartheta)$ , ahol  $\vartheta \leq 1$ . ( $\vartheta = 1$  triviális;  $\vartheta = 2/3$  elemi;  $\vartheta = 131/208 \approx 0.63$  ismert;  $\vartheta = 1/2$ -re nem igaz.) Ennek felhasználásával becsüljük meg a körbe eső, origótól különböző rácspontok origótól mért távolságainak szorzatát.