10. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. május 3.

10.1. Milyen valós c-re konvergens

$$(a)\quad \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot (\log\log n)^c}? \qquad (b)\quad \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log\log n \cdot (\log\log\log n)^c}?$$

10.2. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}[x] \qquad \int_0^1 [x] \,\mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^1 [x+0.5] \,\mathrm{d}\{x\}$$

10.3. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrált közvetlenül és parciális integrálással is.

$$\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}\left[\sqrt{x}\right] \qquad \int_0^\pi x \,\mathrm{d}(\sin x)$$

10.4. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számelméleti függvényre teljesül, hogy $\sum_{k=1}^{n} f(k) = n \log n + \mathcal{O}(n)$. (Ilyen függvény például a osztók száma.) Vezess le ebből, egy alkalmas Stieltjes integrál parciális integrálásával, aszimptotikus becslést a $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k}$ összegre.

10.5. Igaz-e, hogy ha f integrálható, g pedig korlátos változású, és nincs közös szakadási helyük, akkor az $\int_a^b f \;\mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik?

Házi feladatok

10.6. Legyen $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ differenciálható függvény.

(a) Igazoljuk, hogy ha $\limsup_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{x} < -1$, akkor az $\int_1^\infty f$ improprius integrál konvergens.

(b) Igazoljuk, hogy ha $\exists x_0\, \forall x > 0\ \frac{xf'(x)}{x} \geq -1$, akkor az $\int_1^\infty f$ improprius integrál divergens.

10.7. Számítsuk ki az $\int_0^1 x \,\mathrm{d}(e^x)$ Stieltjes-integrált közvetlenül és parciális integrálással is.

10.8. Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik. Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos a $c \in (a,b)$ pontban, akkor az $F(x) = \int_a^x f \;\mathrm{d}g$ függvény is folytonos c-ben.

10.9. Hogyan definiálhatnánk az $\int_a^b f \cdot |\,\mathrm{d}g|$ integrált? Mondjunk elégséges feltételeket a létezésére!

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM10.1. Terjesszük ki a Stieltjes-integrált improprius értelemben. Legyen $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $f, g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \;\mathrm{d}g$ Stieltjes integrál létezik tetszőleges $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ intervallumban. Legyen $\int_\alpha^\beta = \lim_{a\to\alpha+} \lim_{b\to\beta-} \int_a^b f \;\mathrm{d}g$. Igazoljuk, hogy ha $\int_\alpha^\beta |f| \cdot |\,\mathrm{d}g|$ véges, akkor $\int_\alpha^\beta f \;\mathrm{d}g$ konvergens.

PM10.2. (a) Bizonyítsuk be, hogy $s > 0$ esetén

$$\Gamma(s) = \frac{(s-1)^s}{e^{s-1}} \int_0^\infty \left(ye^{1-y}\right)^{s-1} \,\mathrm{d}y.$$

(b) Vezessük le a Gamma-függvényre vonatkozó Stirling-formulát ebből a képletből.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`