11. Valós analízis 2 gyakorlat, 2017. május 10.

11.1. Konvergens? Feltételesen konvergens? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+\sqrt{n}+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/2]}}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\sum e^{-n^2} \qquad \sum \frac{n^{10}}{3^n-2^n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum n^2 e^{-\sqrt{n}} \qquad \sum \left(n^{1/n^2}-1\right) \qquad \sum \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log^2 n}$$

11.2. Alkalmazható-e a gyök- vagy a hányados-kritérium?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

11.3. Ebben a feladatban *végtelen táblázaton* egy $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j=1,2,\ldots)$ rendszert (ha tetszik, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvényt) értünk.

(a) Mutassuk példát olyan végtelen táblázatra, amelyben minden sor összege konvergens, minden oszlop összege konvergens, továbbá a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege is konvergens, de különböző.

(b) A táblázat egy *bejárásán* azt értjük, hogy a táblázat elemeit valamilyen sorrendben sorozatba rendezzük. Mutassuk meg, hogy ha a táblázatban minden szám nemnegatív, akkor bármilyen bejárásban az elemek összege ugyanaz.

(c) Mutassuk meg, hogy ha a táblázatban az az elemek abszolút értékeinek összege véges, akkor az elemek összege bármilyen bejárásban abszolút konvergens, és az összeg értéke mindig ugyanaz.

(d) Legyen $P=\sum_{i,j} a_{ij}^{+}$ és $N=\sum_{i,j} a_{ij}^{-}$. (Egy x valós szám pozitív és negatív része $x^{+}=\begin{cases} x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, illetve $x^{-}=\begin{cases} |x| & x\le 0\\ 0 & x>0\end{cases}$. Figyeljük meg, hogy a negatív rész is nemnegatív, hasonlóan ahhoz, hogy egy komplex szám képzetes része is valós szám.) Mutassuk meg, hogy ha P és N közül legalább az egyik véges, akkor az elemek összege bármilyen bejárásban $P-N$, és

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)=P-N.$$

(avagy, a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege is $P-N$.)

(d) Mutassuk meg, hogy $P=N=\infty$, akkor van olyan bejárás, amely mentén az összeg "oszcillálva" divergens.

11.4. Igazoljuk az $a_{ij}=x^{i+j}$ $(i,j\ge 0)$ végtelen táblázat segítségével, hogy $|x|<1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

11.5 (Dirichlet-kritérium). Legyen (a_n) és (r_n) két olyan számsorozat, amikre az $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ sorozat korlátos, r_n monoton fogy és $r_n\to 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum a_n r_n$ konvergens.

11.6. Vezessük le a Dirichlet-kritériumból, hogy minden Leibniz-típusú sor konvergens.

11.7. A Dirichlet-kritérium alkalmazásával igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}$ minden valós a-ra konvergens.

Házi feladatok

11.8. Konvergens? Feltételesen konvergens? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{2^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

$$\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}\log n + n\log\log n} \qquad \sum \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

11.9. Alkalmazható-e a gyök- vagy a hányados-kritérium?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum e^{-n^2 x} \qquad \sum \frac{x^n}{3^n - 2^n}$$

11.10. A Dirichlet-kritérium alkalmazásával igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(na)}{n}$ minden $0 < a < 2\pi$-re konvergens.

11.11 (Abel-kritérium). Legyen $\sum a_n$ konvergens sor, továbbá (r_n) monoton és korlátos sorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\sum a_n r_n$ konvergens.

11.12. Igaz, vagy hamis?

(a) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ konvergens.

(b) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ divergens.

(c) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergens.

(d) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ divergens.

11.13. Mi lehetne a gyök-kritérium és a hányados-kritérium improprius integrálokra vonatkozó megfelelője?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál piros pontra beváltható) feladat

PM11.1. Mi lehetne a Dirichlet-kritérium és az Abel-kritérium improprius integrálokra vonatkozó megfelelője? Mondjuk ki és bizonyítsuk be!

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu