B. Sc. I. Mat. Intenzív Analízis, 2016/17, II. félév

Második ZH, 2017. május 15.

Minden beadott lapra írd rá a nevedet.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges. Előadáson szerepelt tételek, illetve a gyakorlaton bizonyított állítások bizonyítás nélkül felhasználhatóak. Egyéb állításokra nem elég hivatkozni, hanem bizonyítást is kell adni, a tanult anyag felhasználásával.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1. Számítsd ki az alábbi integrálokat.

$$(a) \quad \int_0^{\pi} x^5 \cos x \, \mathrm{d}x; \qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3^x+1}}$$

2. Milyen hosszú a $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának a $(0,1)$ és az $(a, \operatorname{ch} a)$ pont közötti íve?

3. Igazold, hogy tetszőleges $c > 0$ számra

$$\frac{1^c + 2^c + \ldots + n^c}{n^{c+1}} \to \frac{1}{c+1}.$$

4. Mik azok a c valós számok, amikre az

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ar\,cth} x}{x} \right)^c \mathrm{d}x$$

integrál konvergens?

5. Például a Legendre-formulából (az $n!$ prímtényezős felbontásából) tudjuk, hogy

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Vezesd le be ebből, hogy $\pi(x) < c\frac{x}{\log x}$ valamilyen pozitív c konstanssal.

6. (a) Igazold, hogy ha $\overline{\lim} \left(|a_n|^{\frac{1}{\log n}} \right) < \dfrac{1}{e}$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens.

(b) Igazold, hogy ha $a_n > 0$, és $\underline{\lim} \left(a_n^{\frac{1}{\log n}} \right) > \dfrac{1}{e}$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

(c) Mondhatunk-e valamit az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájáról, ha $a_n > 0$, és $\lim \left(a_n^{\frac{1}{\log n}} \right) = \dfrac{1}{e}$?

7. Az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénynek minden $c \in [0,1]$ pontban létezik véges határértéke. (Az intervallum végpontjaiban féloldali határértéke létezik.) Bizonyítsd be, hogy f integrálható.