Emlékeztető az Analízis 3 előadásokról (2018. ősz)

(Utolsó módosítás: 2018. december 22., 14:48)

Hivatkozások

[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

1. előadás, 2018. szept. 10.

[LTS2, 9–12. o.]

https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

Norma, metrika, euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. A $\|.\|_q$ $(q \geq 1)$ és $\|.\|_\infty$ normák. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozat. Ekvivalens átfogalmazások: $a_n \to b \Leftrightarrow \forall \varepsilon\, VSK\, a_n \in B(b, \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - b| \to 0$. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \ldots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Korlátos sorozatok. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Bolzano-Weierstrass tétel. $\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával, azaz vannak olyan $K_1, K_2 > 0$ konstansok, hogy $K_1|a| \leq \|a\| \leq K_2|a|$. (Az alsó becslés bizonyítása holnapra maradt.) Következmény: a konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk.

2. előadás, 2018. szept. 11.

[LTS2, 13–21. o.]

Végtelen dimenzióban az összes norma ekvivalenciája nem igaz, például a $C([0,1])$ térben $\|f\|_1 = \int_0^1 x|f(x)|\,\mathrm{d}x$ és $\|f\|_2 \int_0^1 (1-x)|f(x)|\,\mathrm{d}x$ két olyen norma, amelyeknek az aránya sem alulról, sem felülről nem korlátos (biz. nélkül) Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, nyílt és zárt halmazok komplementuma, uniója és metszete, halmaz lezártja, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. nem függ attól, hogy melyik normát használjuk.

Összefüggőség és ív/útszerű összefüggőség. Bebizonyítuttk, hogy ha egy halmaz ív/útszerűen öf, akkor öf. A visszafelé iránytól elmondtam a hegymászós feladatot, és a választ is elárultam. Bebizonyítotuk, hogy minden nyílt halmaz olyan nyílt komponensekre bomlik, amelyekben bárely két pont összeköthető töröttvonallal. Ha egy hamaz öf és nyílt, akkor bármley két pontja összeköthető töröttvonallal. $\mathbb{R}^p$ összefüggő, mert ívszerűen öf; ebből következik, hogy az öres hakmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, ami egyszerre nyílt és zárt is.

3. előadás, 2018. szept. 17.

[LTS2, 18,22–24. o.]

Elmondtam a hegymászós feladat hibás biznyítását és az ellenpéldát, hogy keressék meg a hibát.

Újra definiáltam az összefüggőséget, mert a múltkor kimaradt a "relatív" nyíltság.

Def: tartomány; nyílt halmaz sűrű részhalmazai. Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett levő konvergens sorozatok limeszei is elemei.

Cantor metszettétel, Lindelöf lemma. Egy K halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Zárt és kompakt halmaz távlsága pozitív. Speciálisan, ha G nyílt és K egy kompakt része, akkor K és G külseje között a távolság pozitív.

Elkezdtük a határértékekt. Definiáltuk epszilon-deltával és környezetekkel is egy függvény határértékét egy torlódási pontban egy halmazra szorítkozva. Példának az $x^2y/(x^2+y^2)$ és $xy/(x^2+y^2)$ volt.

4. előadás, 2018. szept. 18.

[LTS2, 28-36. o.]

https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

Definiáltuk a végtelen határértéket. Bizonyítás néllkül volt átviteli elv, határátmenet, rendőr-elvek, műveletek, linearitás.

Defináltuk a limszupot és liminfet, és bizonyítás nélkül felírtuk, hogy ezek a legnagyobb és legkisebb torlódási értékek, $\liminf \leq \limsup$ és akkor egyenlő, ha van határérték, továbbá felírtuk a $\liminf$-re és $\limsup$-ra vonatkozó határátmeneteket.

Ezután megvolt a folytonosság definíciója, átviteli elv bizonyítás nélkül, műveletek, beleértve a kompozíciót is. Bizonyítással volt Weierstrass és Heine.

(Kifelejtettem annak kimondását, hogy a polinomok és rac. törtfüggvények folytonosak.)

5. előadás, 2018. szept. 24.

[LTS2, 39–54. o.]

A koordinátafüggvények, a polinomok és a rac. törtfüggvények folytonosak.

Parciális és iránymenti deriváltak. Szélsőértékkeresés parciális deriváltakkal.

p-változós függvény érintősíkja. Differenciálhatóság. Ha f differenciálható a-ban, akkor folytonos a-ban, parciálisan differenciálható a-ban, és a derivált, mint lineáris függvény, egyértelmű. Az $f'(a)$, $\nabla f(a)$, $\operatorname{grad} f(a)$ jelölések. Iránymenti derivált definíciója.

6. előadás, 2018. szept. 25.

[LTS2, 48–56, 81–85. o.]

Az $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ függvény az origóban 0, minden irányban van iránymenti deriváltja, de nem differenciálható. Ha f differenciálható, akkor minden irányban differenciálható. Ha a egy környezetében f parciálisan differenciálható és a parciális deriváltak a-ban folytonosak, akkor f differenciálható a-ban. Minden polinom és minden racionális tört differenciálható. Lagrange-középértéktétel.

Vektorértékű függvények határértéke, folytonossága. Kompakt halmaz folytonos képe kompakt. Ha két kompakt halmaz közötti bjiekció az egyik irányban folytonos, akkor a másik irányban is folytonos. Heine tétele vektorértékű függvényekre.

7. előadás, 2018. okt. 1.

Videó távelőadás volt: https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

PDF: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf

[LTS2, 81–94. o.]

Lineáris leképezések, lineáris leképezés normája; többváltozós, vektorértékű függvények differenciálása, Jacobi-mátrix; differencálhatóság és folytonosság, parciális differenciálhatóság kapcsolata; differenciálási szabályok, többváltozós láncszabály, lokális inverz differenciálása.

8–9. előadás, 2018. okt. 2–8.

Videó távelőadás volt: https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

PDF: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf

[LTS2, 96–112. o.]

Lokális injektivitás, lokális szürjektivitás, lokális inverz létezése, impliciten megadott függvény létezés és differenciálhatósága, Lagrange multiplikátor módszer.

A lokális szürjektivitás tételét az $x \mapsto |f(x)-y|^2$ paraméteres függvény minimalizálásával bizonyítottuk be. A Lagrange-féle multiplikátor módszert sem a könyv szerint, hanem (kicsit erősebb feltétel mellett) a lokális szürjektívitás tételéből vezettük le. Ld. a PDF-et vagy a videót.

10. előadás, 2018. okt. 9.

11. előadás, 2018. okt. 15.

12. előadás, 2018. okt. 16.

Elkezdtük a Jordan-mértéket; a "mértéktől" elvárjuk, hogy pozitív, additív, egybevágóság-invariáns és normált legyen; az additivitásból persze következik, hogy monoton is.

Definiáltuk a Jordan-féle külső és belső mértéket és a kockázással kapható külső és belső közelítéseket. Bebizonyítottuk, hogy tengelypárhuzamos téglák esetén a kockás közlítések a tégla éleinek szorzatához tartanak.

13. előadás, 2018. nov. 5.

Felépítettük a Jordan-mértéket. Csak vázlatosan mondtam el, hogy a Jordan-mérhető halnazok gyűrűjén a J-mérték a egyetlen pozitív, additív, eltolásinvariáns normált fügvényt. Azt, hogy a korlátos, konvex halmazok mérhetőek, nem biznyítottuk.

14. előadás, 2018. nov. 12.

Mérték kiszámítása a szeletek integráljaként, kúp és gömb térfogata, lin.transzformációk, Cantor-halmaz, kövér Cantor halmaz, Sierpinski.szőnyeg.

15. előadás, 2018. nov. 13.

16. előadás, 2018. nov. 19.

Felépítettük a Jordan-mérték szerinti alsó, felső és az integrált, és az integrálható függvényeket.

17. előadás, 2018. nov. 20.

Szukcesszív integrálás, int.transzformáció, polárkoordinátás helyettesítés síkban. Polárkkordinátás példákra nem maradt idő, csak a kör területét számoltuk ki.

18. előadás, 2018. nov. 26.

Befejeztük a polárkoordinátákat, kiszámoltuk az $e^{-x^2/2}$ integrálját a számegyenesen. [LTS2, 166–167. o.]

Elkezdtük a paraméteres integrálokat. Felírtam a Gamma- és a Béta-függvényt, kiszámoltuk $\Gamma(1)$-et és levezettük a $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ függvényegyenletet. A Béta-függvényre bizonyítás nélkül felírtam, hogy $B(u,v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$.

Megvoltak a Jordan-mérhető halmazon vett paraméteres integrálok: $F(t) = \int_X f(t,x)dx$, ezek folytonossága, integrálása és differenciálása. Definiáltuk az improprius paraméteres integrálok egyenetes konvergenciáját ($F(t) = \int_c^\gamma f(t,x)dx$), megvolt az ilyenek folytonossága és integrálása. [LTS2, 358–366. o.]

19. előadás, 2018. nov. 27.

Improprius parameteres integrálok differenciálása, Wieirstrass tétel (dominált konvergencia), és a Gamma-függvény deriválása. [LTS2, 366–370. o.]

Elkezdtük a korlátos változású függvényeket. [LTS1, 459–467. o.] A könyvtől kicsit eltérve definiáltuk a pozitív és a negatív variációt is. Bebizonyítottuk, hogy minden monoton és minden Lipschitz függvény k.v.; a $x \cdot \sin(\pi/x)$ függvény folytonos, de nem k.v.; $P(f;[a,b]) + N(f;[a,b]) = V(f;[a,b])$; $P(f+g,[a,b]) \leq P(f,[a,b]) + P(g,[a,b])$, $N(f+g,[a,b]) \leq N(f,[a,b]) + N(g,[a,b])$ és $V(f+g,[a,b]) \leq V(f,[a,b]) + V(g,[a,b])$; $P(f,[a,b]) + P(f,[b,c]) = P(f,[a,c])$, $N(f,[a,b]) + N(f,[b,c]) = N(f,[a,c])$ és $V(f,[a,b]) + V(f,[b,c]) = V(f,[a,c])$. Befejezés legközelebb.

20. előadás, 2018. dec. 3.

Befejezzük a KV függvényeket, lényegében a könyv szerint. RS integrálok: definíció, egyszerű példák, kétféle linearitás, kettévághatóság. Csak kimondom, hogy f és g nem szakadhat ugyanazon a helyen; csak 1 konkrét példa lesz. Cauchy-kritértium; f folyt+g KV, f intható és g' intható.

21. előadás, 2018. dec. 4.

Parciális integrálás RS integrálokkal. Alkalmazás: $\pi(x) \sim x/\log x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta(x) \sim x$.

Vonalintegrálok. [LTS2, 177–184. o.] Skalár- és vektormezők. Vonalintegrálok különböző típusai, definíció, átírás RS integrálokkal. Folytonos függvény rektifikálható görbén vett vonalintegráljai léteznek. Kiszámítás, ha a görbe folyt. diffható. Primitív függvény és Newton-Leibniz formula, potenciálfüggvény.

22. előadás, 2018. dec. 10.

Zárt görbe defníciója. Triviális felső becslés a vonalintegrál nagyságára.

Nyílt halmazon folytonos függvénynek akkor és csak akkor létezik primitív függvénye, ha minden, a halmazban levő folytonos, zárt, rektifikálható görbén, illetve minden zárt töröttvonalon 0 a vonalintegrálja. Ha $f : G \to \mathbb{R}^p$ diffható, akkor a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy a Jacobi-mátrix minden pontban szimmetrikus legyen (avagy, a "keresztbe vett" parciális deriváltak egyenlők, avagy f "rotációmentes" legyen).

Az $(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}$ függvény a globálias nem létező szög(x, y) függvény deriváltja, emiatt rotációmentes, de mincs a teljes $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományon primitív függvénye.

Minden konstans vektormezőnak van primitív függvénye, és minden Ax lineárisnak is, ha A szimmetrikus.

Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. Konvex és csillagszerű tartományokon minden diffható, rotációmente vektormezőnek van primitív függvénye.

Az $(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}$ függvény vonalintegrálja egy zárt görbén csak attól függ, hányszor kerüli meg a görbe az origót.

23. előadás, 2018. dec. 11.

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. Zárt vezető mágneses örvényerőssége és a Gauss-féle összekapcsolódásái szám kapcsolata.