Inverz- és implicitfüggvény-tétel

(Analízis 3 előadás, ELTE TTK matematikus)

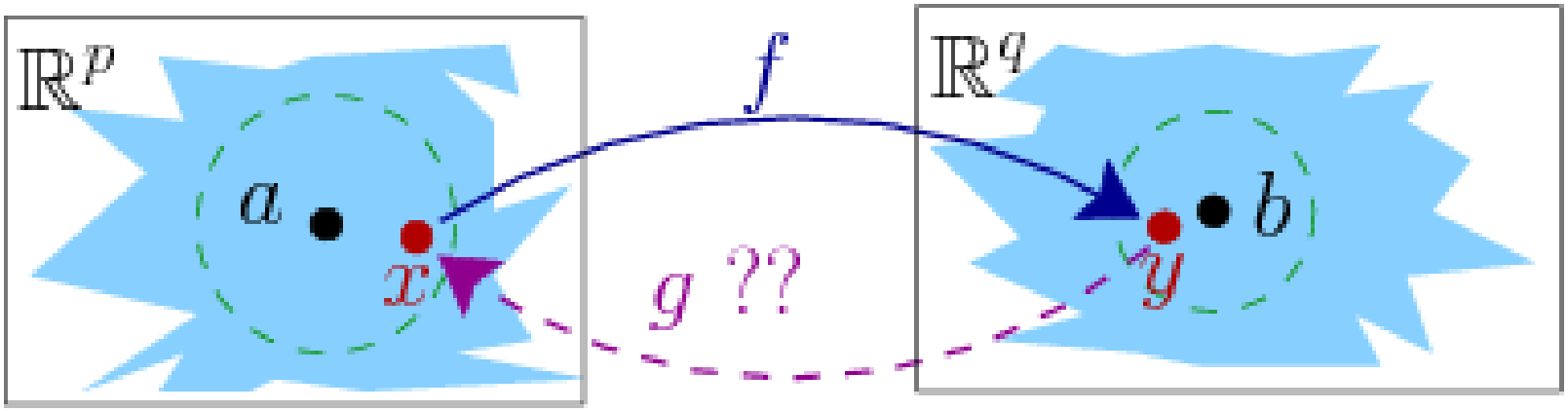
2018. október 2–8.

PDF: `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf`

Lokális inverz függvény

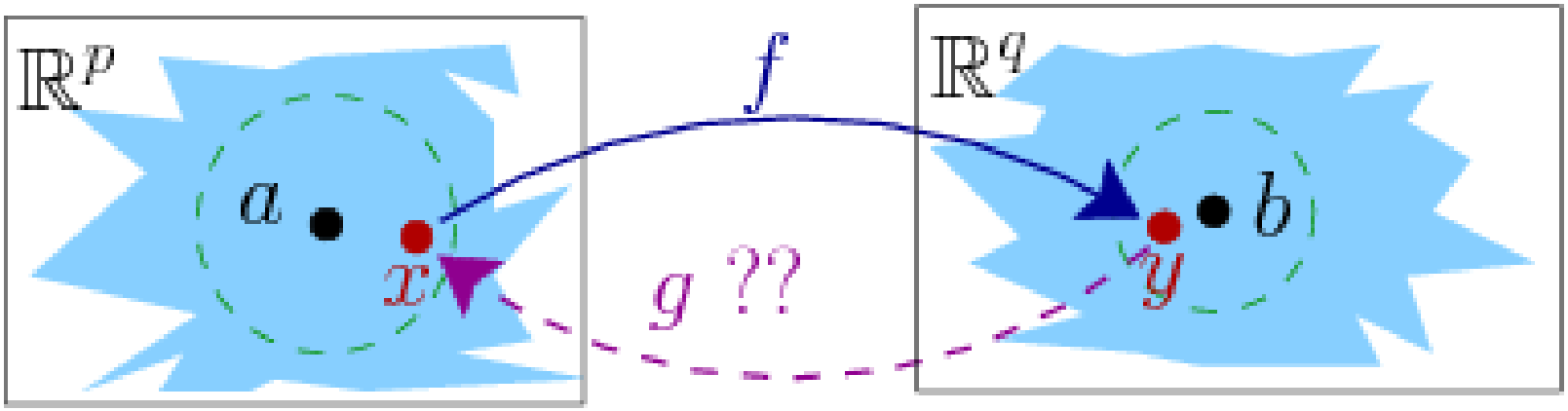
Lokális inverz függvény

Mit várjunk el a lokális inverztől?



Lokális inverz függvény

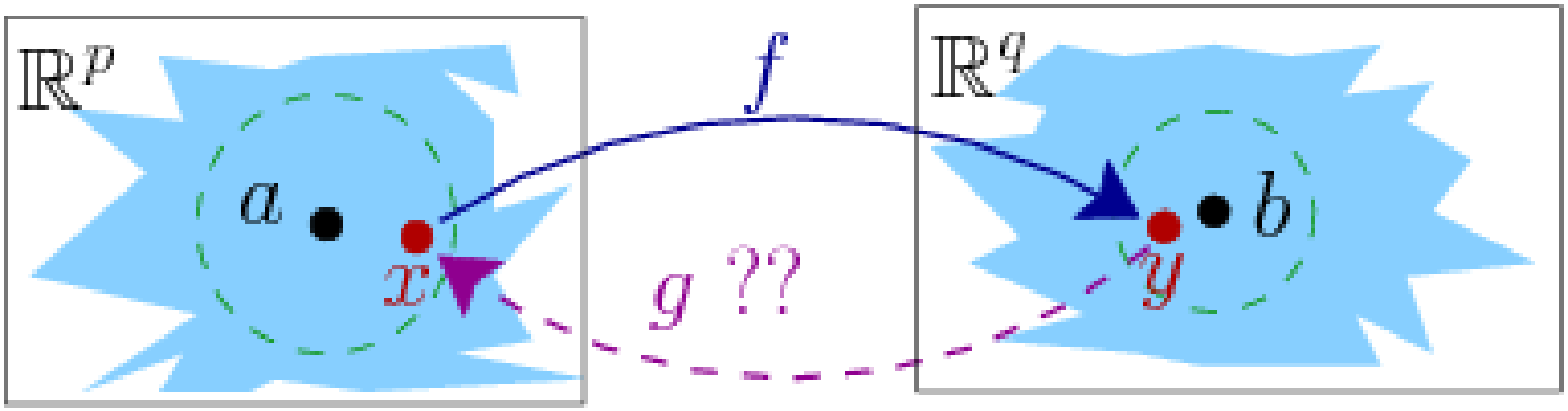
Mit várjunk el a lokális inverztől?



Lokális inverz?

Lokális inverz függvény

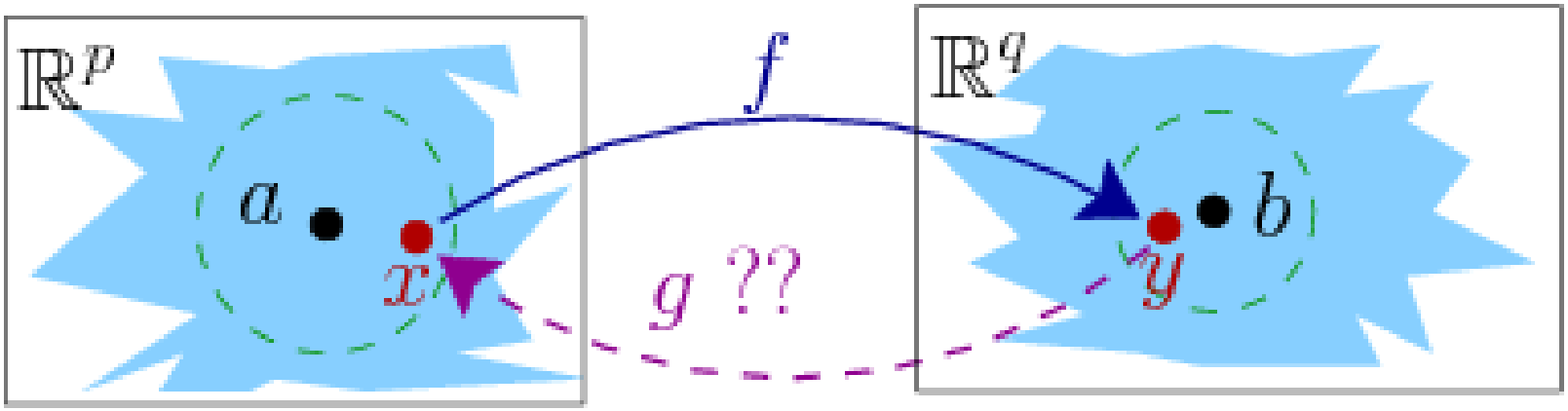
Mit várjunk el a lokális inverztől?



Lokális inverz?
Lokális injektivitás?

Lokális inverz függvény

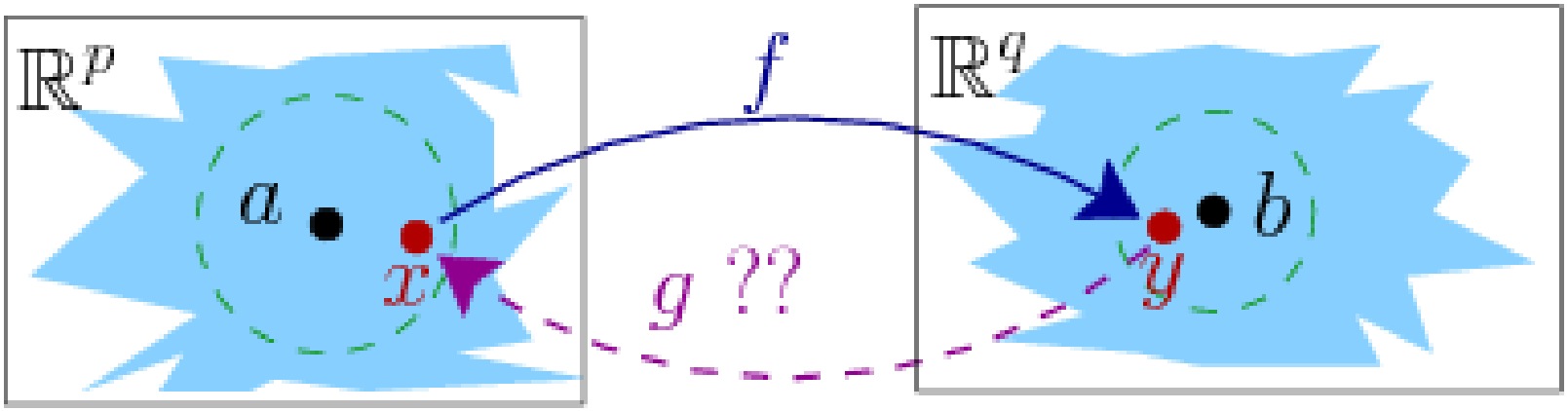
Mit várjunk el a lokális inverztől?



Lokális inverz?
Lokális injektivitás?
Lokális szürjektivitás?

Lokális inverz függvény

Mit várjunk el a lokális inverztől?



Lokális inverz?
Lokális injektivitás?
Lokális szürjektivitás?
Milyen tulajdonságú legyen az $f'(a)$ lineáris leképezés?

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\qquad$ ($A = f'(a)$ lesz)

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\qquad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges)

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\qquad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges)

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \mathrm{rk}\, A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \mathrm{rk}\, A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

Trivi. Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \mathrm{rk}\, A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

Trivi. Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

Biz. Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánsa nem 0.

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \mathrm{rk}\, A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

Trivi. Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

Biz. Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánsa nem 0.
A determináns folytonos (mert rac. tört függvény),

Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ ($A = f'(a)$ lesz)

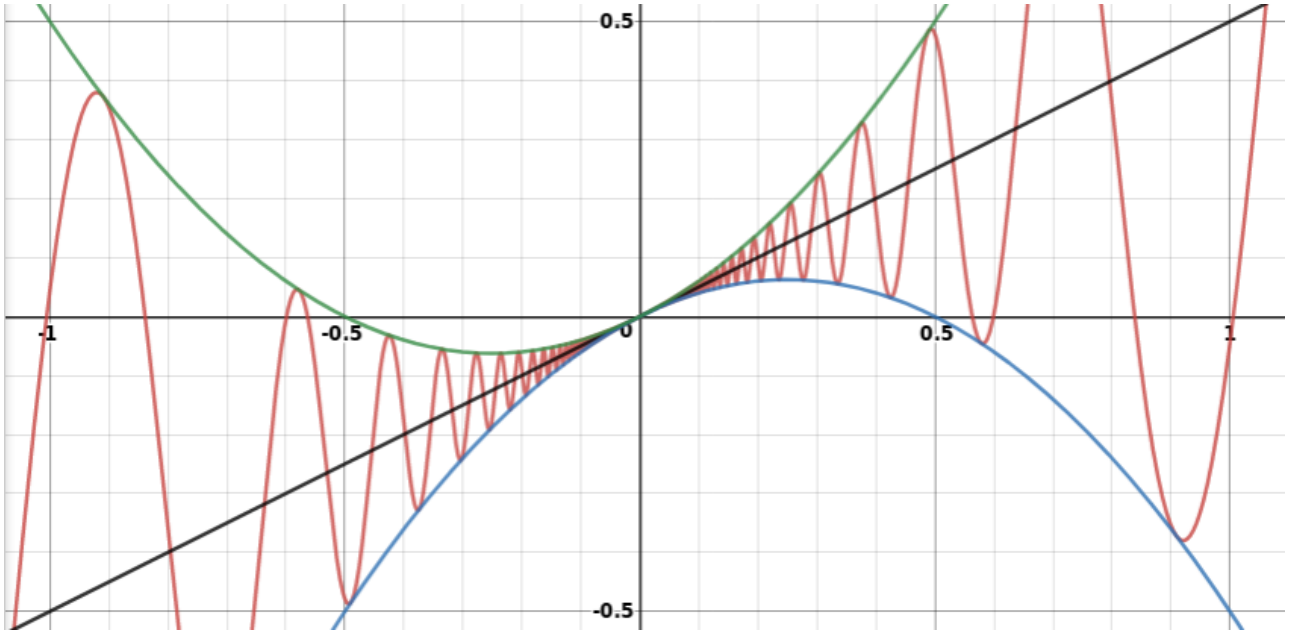
- A injektív $\iff \mathrm{rk}\, A = p$ $\quad$ ($p \leq q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \mathrm{rk}\, A = q$ $\quad$ ($q \leq p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \mathrm{rk}\, A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

Trivi. Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

Biz. Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánsa nem 0.
A determináns folytonos (mert rac. tört függvény), így van az A-nak egy környezete, ahol ugyanannak a részmátrixnak a determinánsa nem 0.

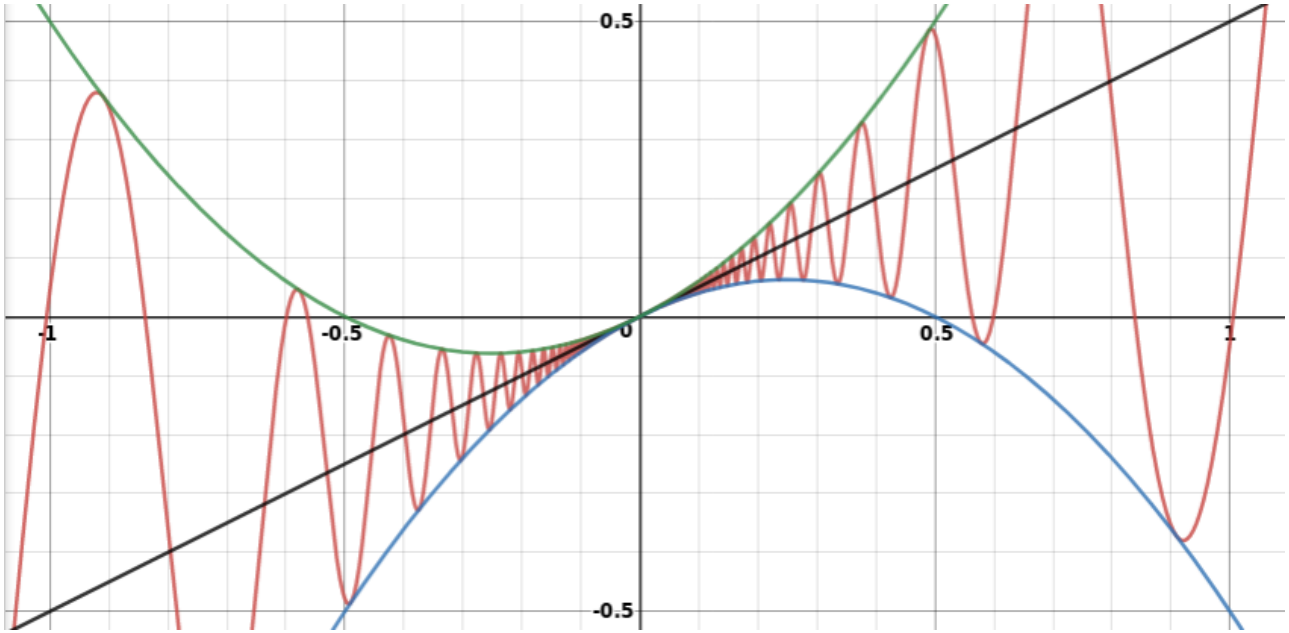
Önmagában a differenciálhatóság nem elég

Önmagában a differenciálhatóság nem elég



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

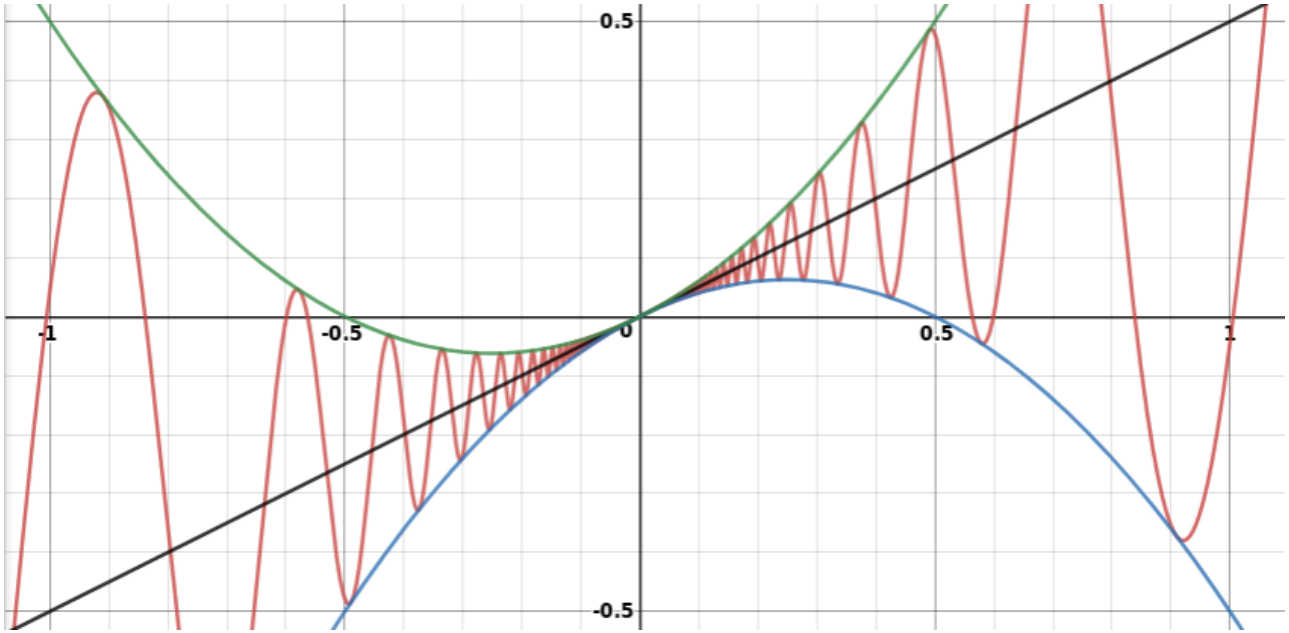
Önmagában a differenciálhatóság nem elég



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \dfrac{10}{x} - 10 \cos \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Önmagában a differenciálhatóság nem elég

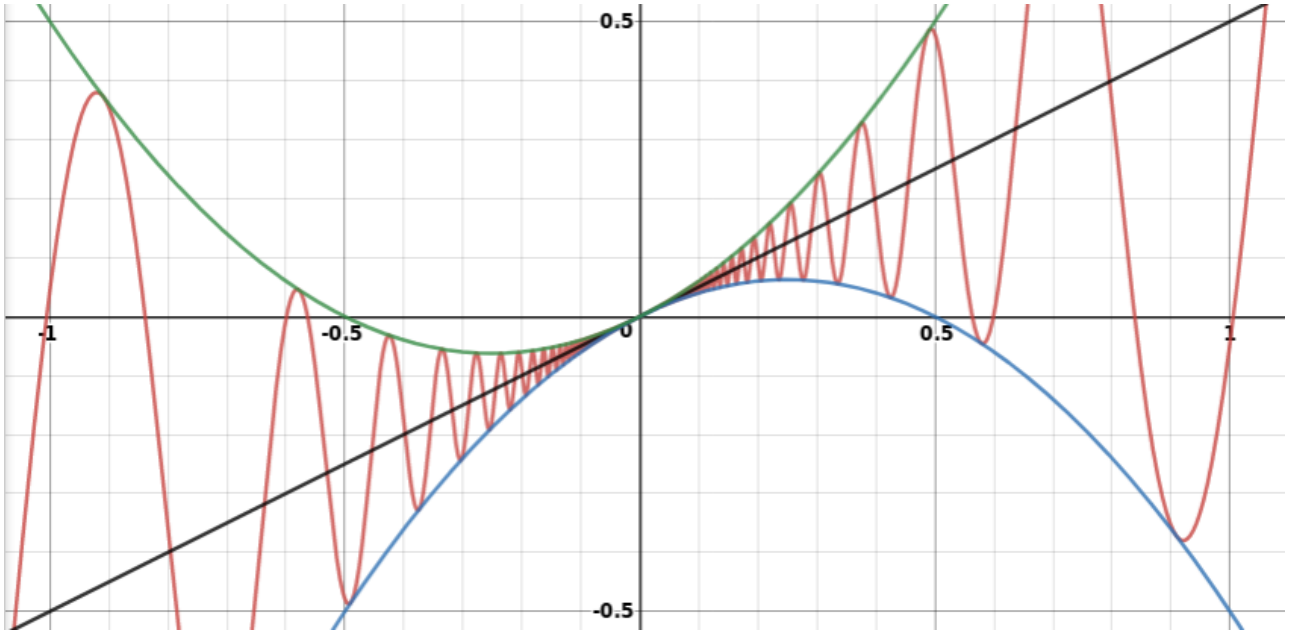


$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \dfrac{10}{x} - 10 \cos \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Noha $f'(0) \neq 0$, még sincs lokális inverz a 0 körül. **:-(**

Önmagában a differenciálhatóság nem elég



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \dfrac{10}{x} - 10 \cos \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Noha $f'(0) \neq 0$, még sincs lokális inverz a 0 körül. **:-(**

A folytonos differenciálhatóságot is ki fogjuk kötni.

A lokális injektivitás tétele

A lokális injektivitás tétele

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.

A lokális injektivitás tétele

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

A lokális injektivitás tétele

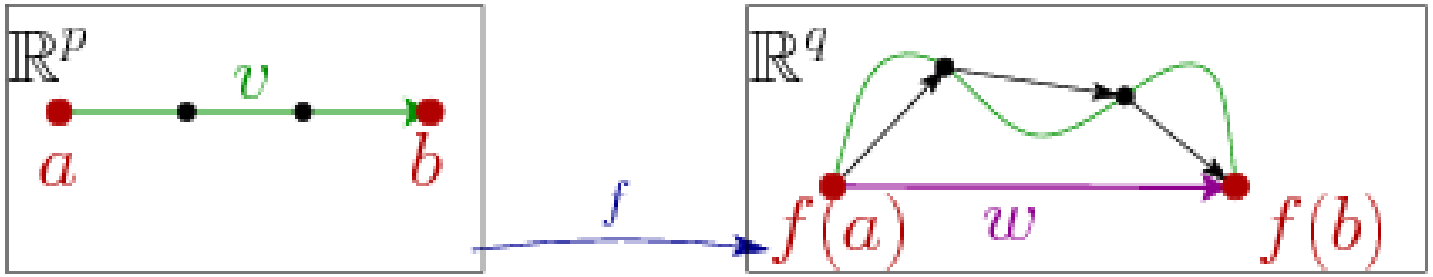
Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és
az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív,

A lokális injektivitás tétele

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és
az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív,

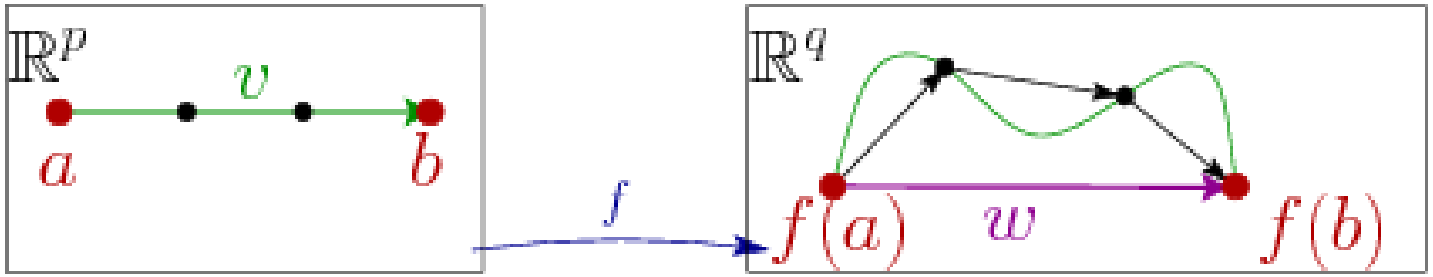
akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$.

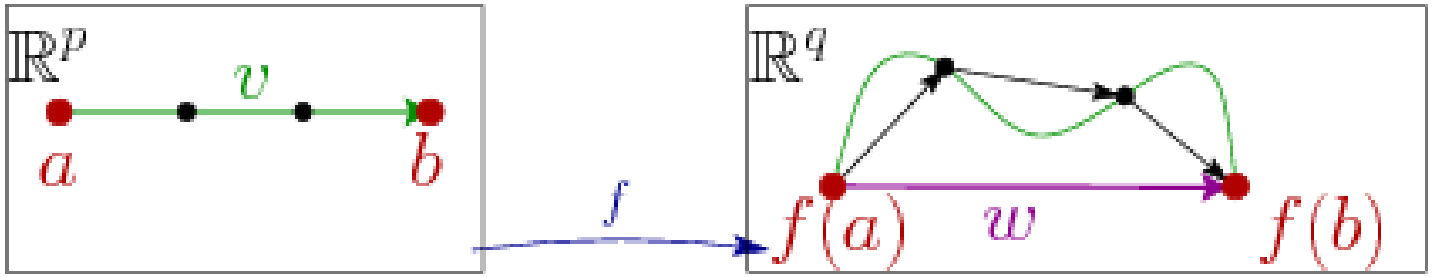
A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

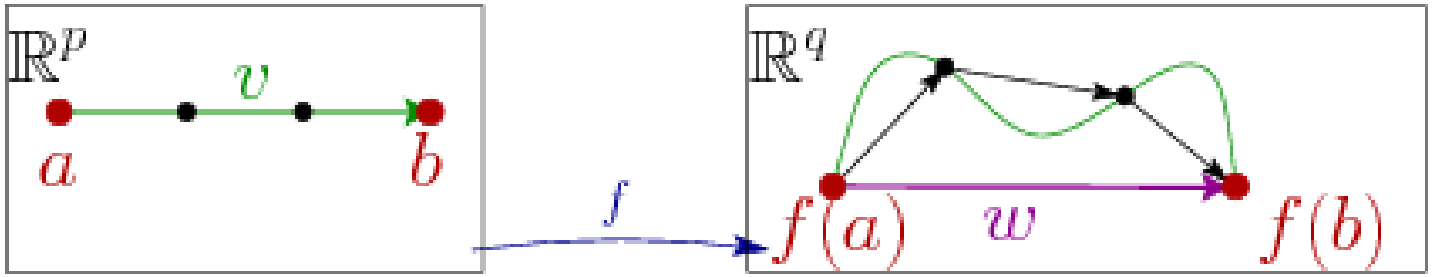


Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális.

A lokális injektivitás tétele, biz.

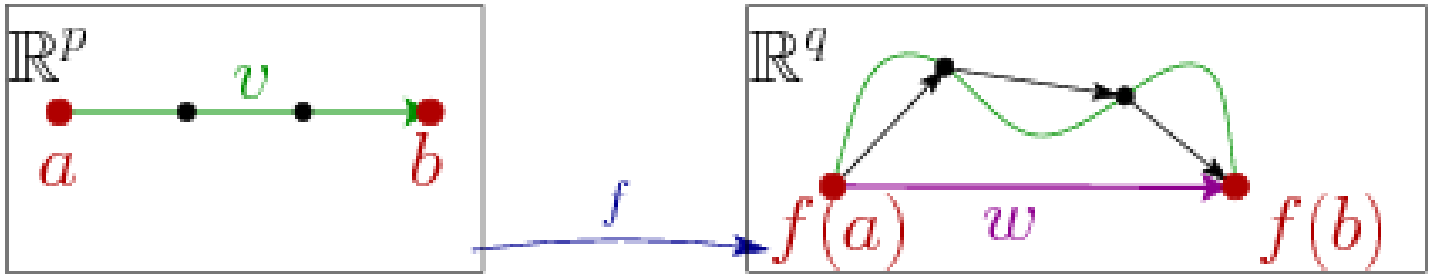


Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

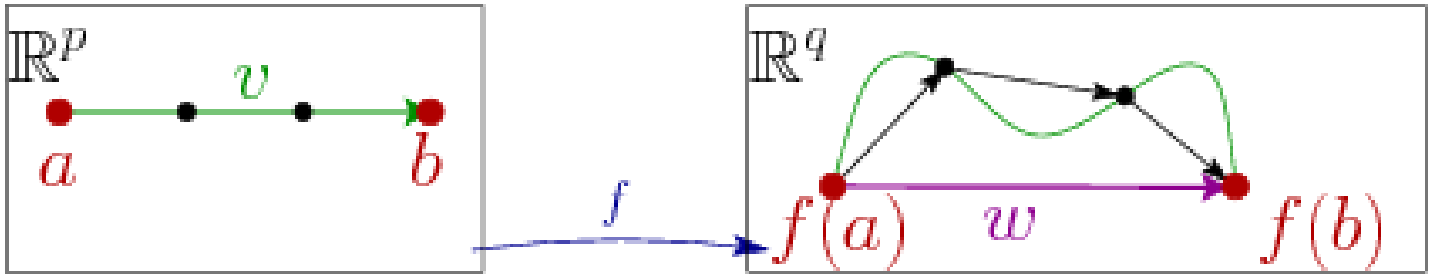
$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

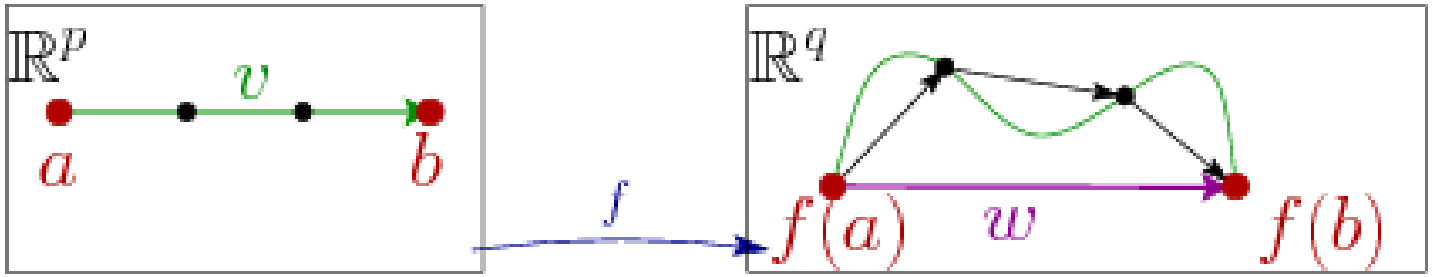
Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

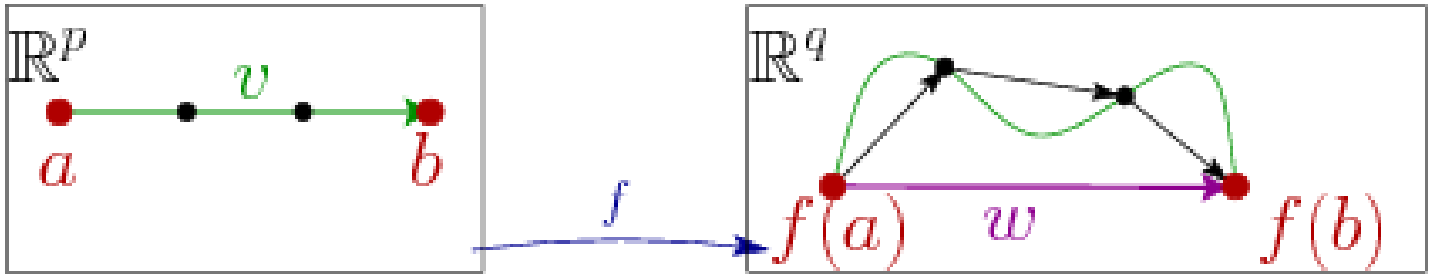
Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

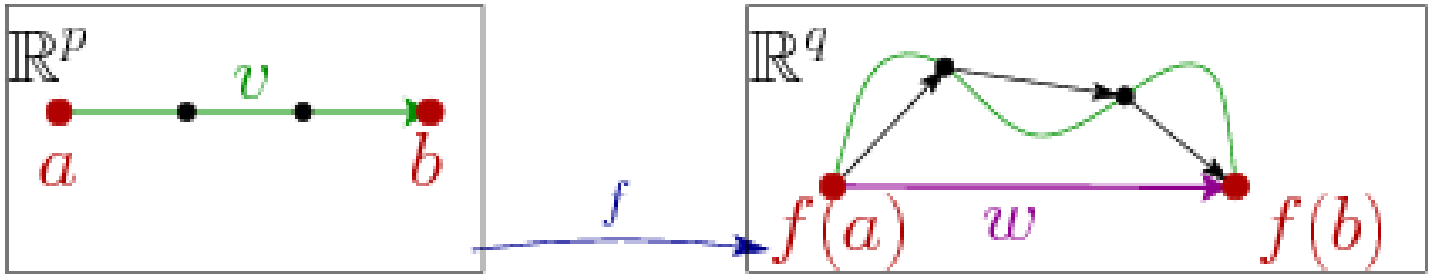
$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \left|f(b) - f(a)\right|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\left|f(b) - f(a)\right|^2 = \left|h(b) - h(a)\right|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

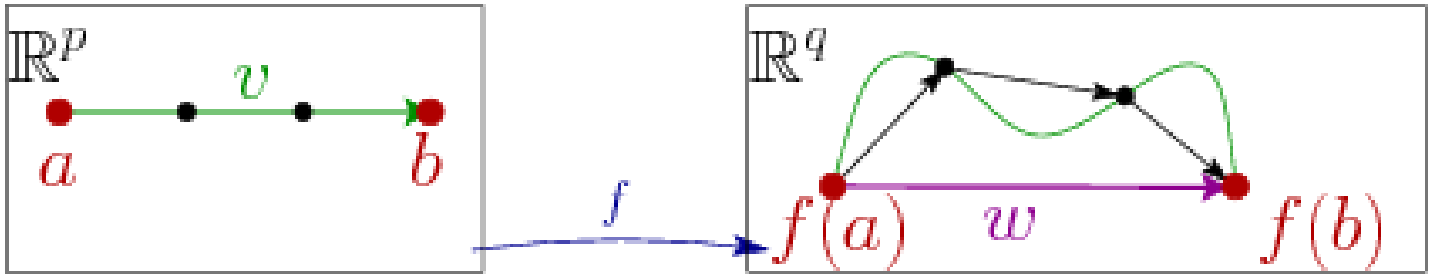
$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\big|f(b) - f(a)\big|^2 = \big|h(b) - h(a)\big| = \big|h'(c)(b - a)\big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

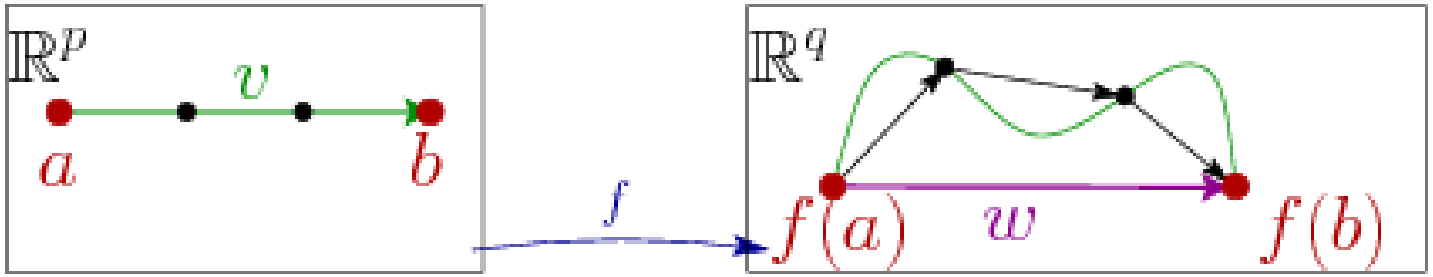
$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\big|f(b) - f(a)\big|^2 = \big|h(b) - h(a)\big| = \big|h'(c)(b - a)\big| = \big|w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)\big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

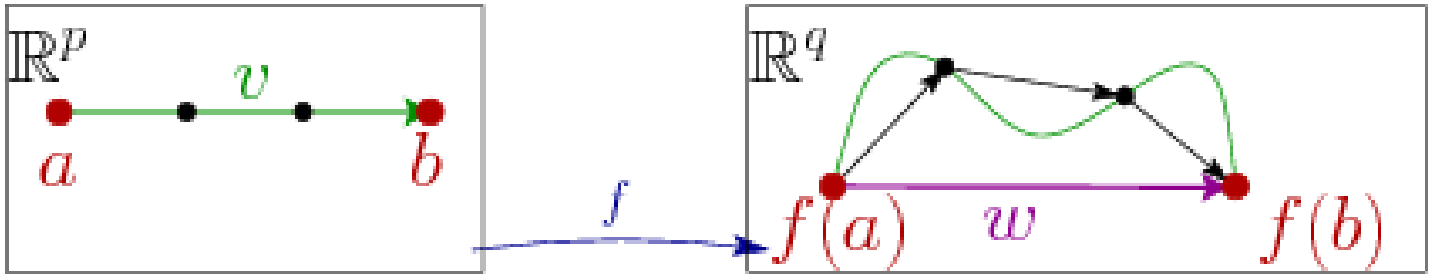
$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\big|f(b) - f(a)\big|^2 = \big|h(b) - h(a)\big| = \big|h'(c)(b - a)\big| = \big|w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)\big| \leq$$
$$\leq |w| \cdot \big|(f'(c)\,(b - a)\big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

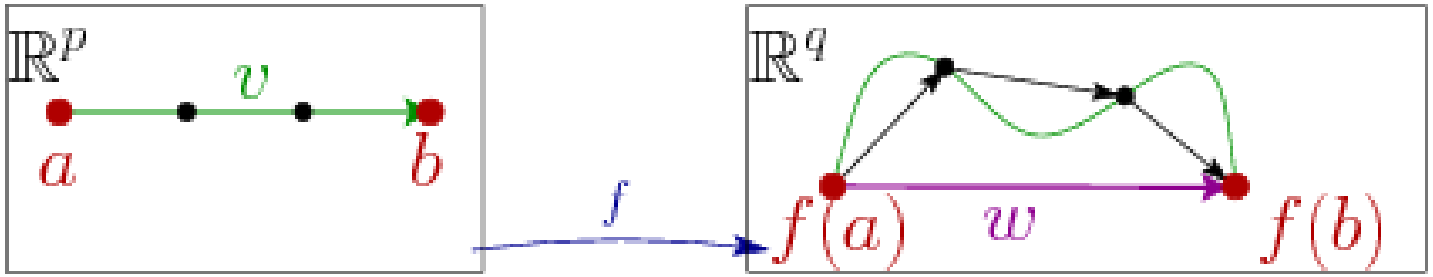
$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \left|f(b) - f(a)\right|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\left|f(b) - f(a)\right|^2 = \left|h(b) - h(a)\right| = \left|h'(c)(b - a)\right| = \left|w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)\right| \leq$$
$$\leq |w| \cdot \left|(f'(c)\,(b - a)\right| \leq |w| \cdot \left\|f'(c)\right\| \cdot |b - a|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.



Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leq M$. Ekkor

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M \cdot |b - a|.$$

Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \big|f(b) - f(a)\big|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\big|f(b) - f(a)\big|^2 = \big|h(b) - h(a)\big| = \big|h'(c)(b - a)\big| = \big|w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)\big| \leq$$
$$\leq |w| \cdot \big|(f'(c)\,(b - a)\big| \leq |w| \cdot \big\|f'(c)\big\| \cdot |b - a| \leq \big|f(b) - f(a)\big| \cdot M \leq |b - a|.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$,

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben
$\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$;

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A,$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$\big|f(x) - f(y)\big|$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \Big|Ax - Ay + \big(f(x) - Ax\big) - \big(f(y) - Ay\big)\Big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big| \geq m|x - y|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big| \geq m|x - y| - \tfrac{m}{2}|x - y|$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big| \geq m|x - y| - \tfrac{m}{2}|x - y| = \tfrac{m}{2}|x - y|.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big| \geq m|x - y| - \tfrac{m}{2}|x - y| = \tfrac{m}{2}|x - y|.$$

A lokális injektivitás tétele, biz.

Tétel (lokális injektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív, akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = f'(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, és $m = \min\big(|Ax| : \ |x| = 1\big)$.
Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és Ax folytonos. Az m nem lehet 0, mert A injektív. Tehát $m > 0$.

Bármely x vektor valamilyen e egységvektor $|x|$-szerese, így

$$|Ax| = \big|A\,|x|e\big| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az a pontnak egy olyan $B(a, r)$ környezetét, amelyben $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$. Ilyen létezik, mert f' folytonos a-ban.

Legyen $g(x) = f(x) - Ax$; a $B(a, r)$ környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \qquad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \tfrac{m}{2};$$

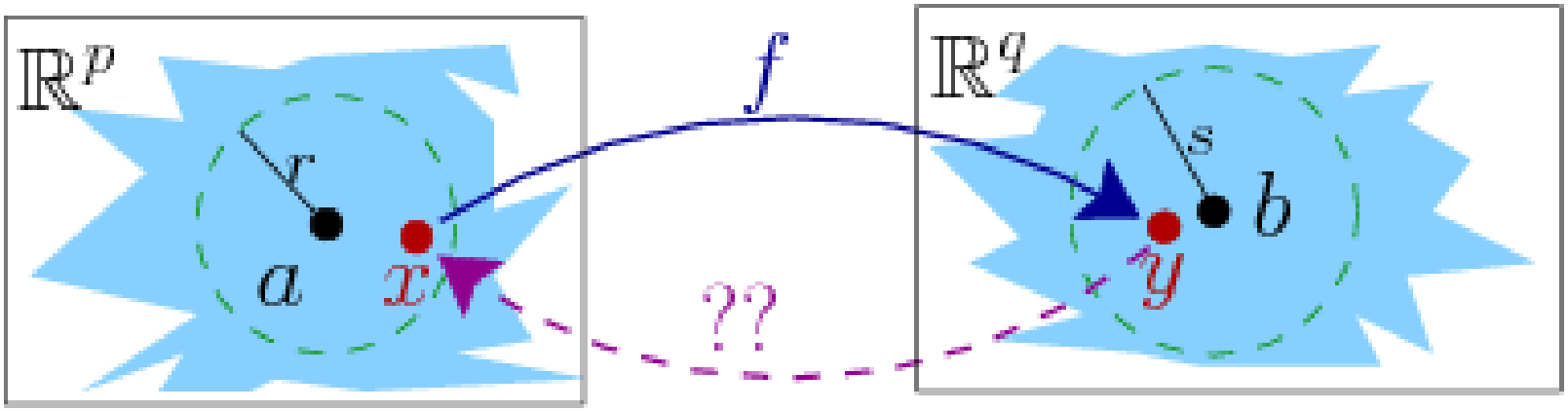
A lemma miatt $x, y \in B(a, r)$ esetén $\big|g(x) - g(y)\big| \leq \frac{m}{2}|x - y|$;

$$\big|f(x)-f(y)\big| = \Big|Ax-Ay+\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(y)-Ay\big)\Big| = \Big|A(x-y)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \geq$$

$$\geq \big|A(x - y)\big| - \big|g(x) - g(y)\big| \geq m|x - y| - \tfrac{m}{2}|x - y| = \tfrac{m}{2}|x - y|.$$

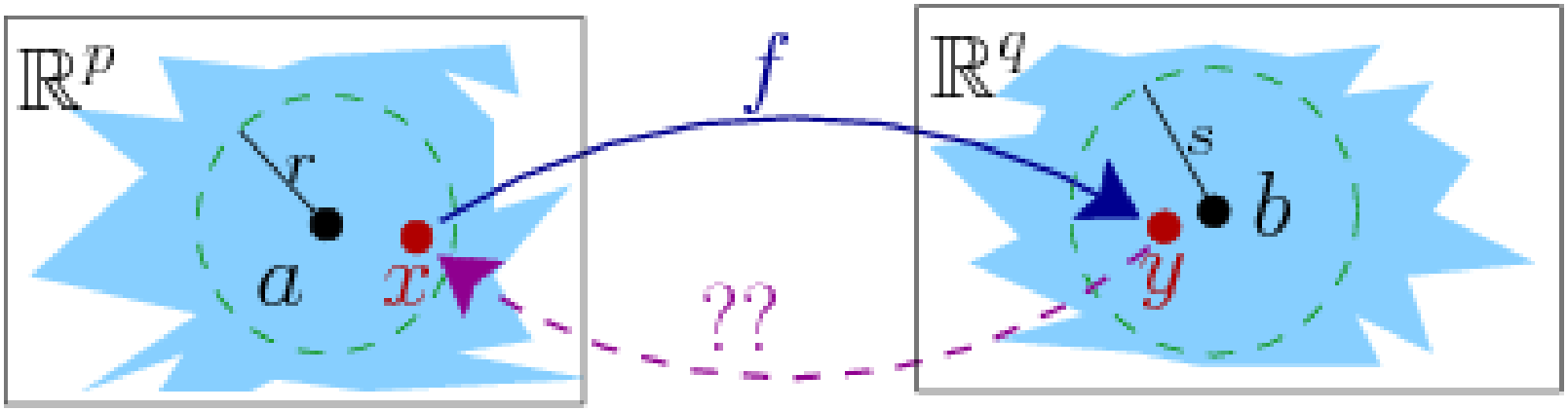
(Kicsit többet bizonyítottunk: van olyan $c > 0$ hogy
$x, y \in B(a, r)$ esetén $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$.)

A lokális szürjektivitás tétele



Tétel (lokális szürjektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.
Avagy, ha $b = f(a)$, $\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

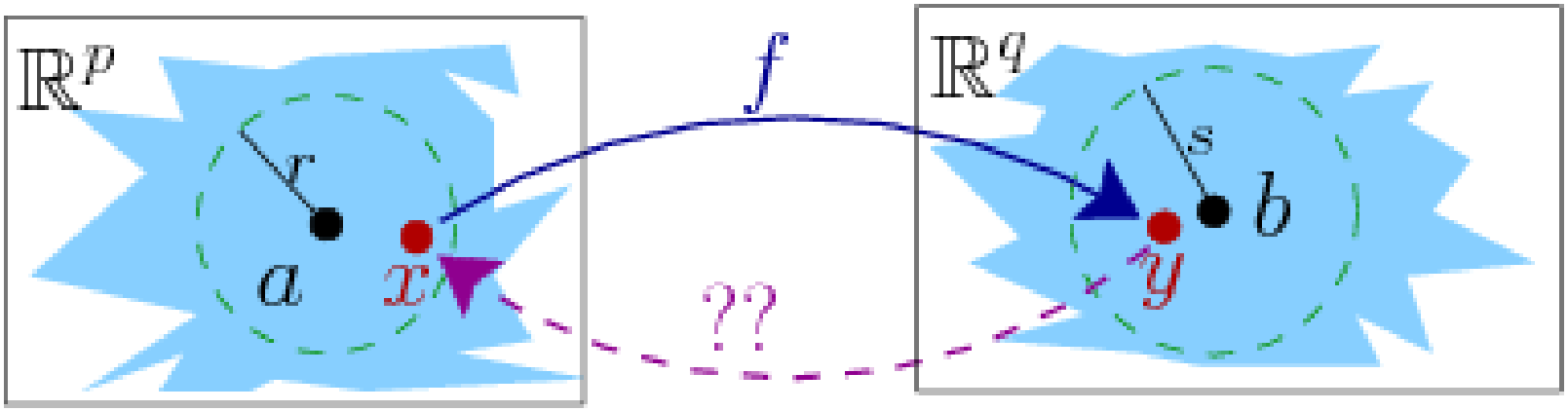
A lokális szürjektivitás tétele



Tétel (lokális szürjektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.
Avagy, ha $b = f(a)$, $\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Biz. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független;

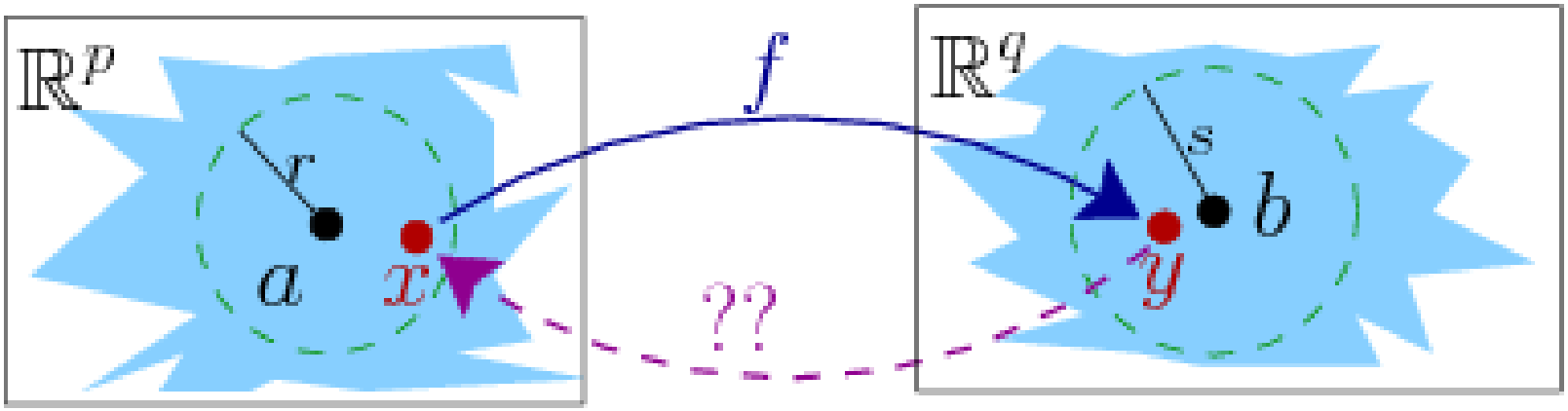
A lokális szürjektivitás tétele



Tétel (lokális szürjektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.
Avagy, ha $b = f(a)$, $\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Biz. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első q oszlop.

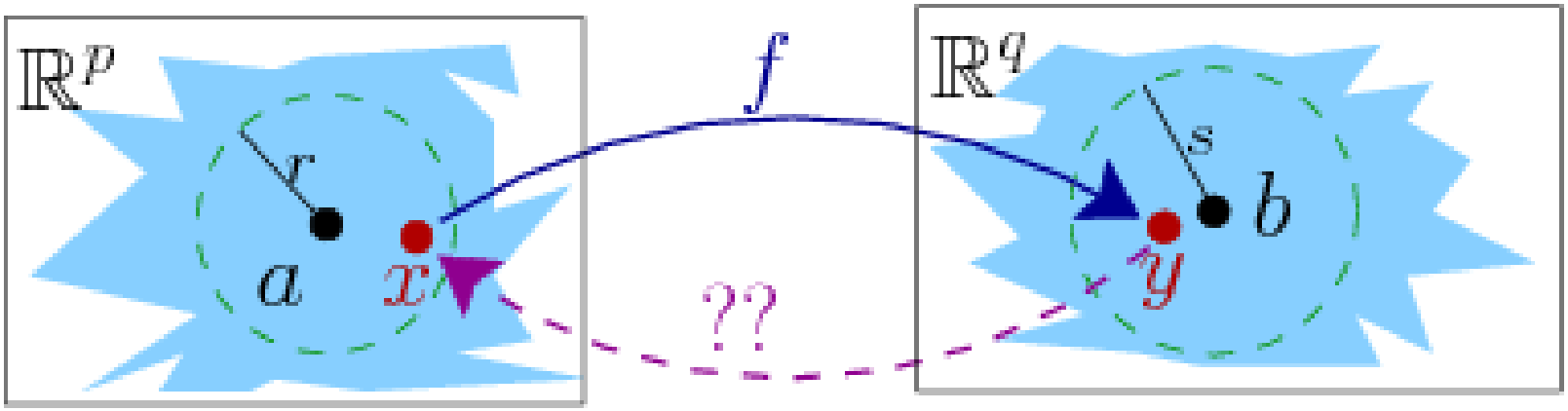
A lokális szürjektivitás tétele



Tétel (lokális szürjektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.
Avagy, ha $b = f(a)$, $\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Biz. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első q oszlop.
Csak olyan x-eket fogunk keresni, amelyekben $x_{q+1} = a_{q+1}$, ldots $x_p = a_p$.

A lokális szürjektivitás tétele



Tétel (lokális szürjektivitás). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.
Avagy, ha $b = f(a)$, $\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Biz. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első q oszlop.
Csak olyan x-eket fogunk keresni, amelyekben $x_{q+1} = a_{q+1}$, ldots $x_p = a_p$.
Mostantól tehát $p = q$; és $f'(a)$ invertálható.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \} > 0$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \{|f(x) - b| : |x - a| = r_0\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.
A határpontokban
$|f(x) - y| = \big|(f(x) - b) - (y - b)\big| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$, ezért
$h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.
A határpontokban
$|f(x) - y| = \big|(f(x) - b) - (y - b)\big| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$, ezért $h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$. A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a h függvény.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.
A határpontokban
$|f(x) - y| = \big|(f(x) - b) - (y - b)\big| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$, ezért $h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$. A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a h függvény.
Legyen x_0 a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát $h' = 0$:

$$0 = h'(x_0) = 2\big(f(x_0) - y\big)^t \cdot f'(x_0) = 0.$$

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.
A határpontokban
$|f(x) - y| = \big|(f(x) - b) - (y - b)\big| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$, ezért $h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$. A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a h függvény.
Legyen x_0 a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát $h' = 0$:

$$0 = h'(x_0) = 2\big(f(x_0) - y\big)^t \cdot f'(x_0) = 0.$$

Az $f'(x_0)$ invertálható, tehát $f(x_0) - y = 0$.

A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Emlékeztető: $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $f : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az a pontban, $f(a) = b$, és az $A = f'(a)$ szürjektív. Bizonyítandó:
$\forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\ \forall\, y \in B(b, s)\ \exists\, x \in B(a, r)\ f(x) = y$.

Az a pont egy környezetében f' invertálható.
A lokális injektivitás tétele szerint az a egy környezetében f injektív.
Válasszunk olyan $0 < r_0 < r$-t, hogy az $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön f injektív, és f' minden pontban invertálható.

Legyen $s = \frac{1}{2} \min \left\{ |f(x) - b| : |x - a| = r_0 \right\} > 0$. Azt állítjuk: ez az s jó.

Vegyünk egy tetszőleges $y \in B(b, s)$ pontot; ehhez kell nekünk olyan $x \in B(a, r_0)$ pontot találni, ahol $f(x) = y$.
Legyen a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön $h(x) = |f(x) - y|^2$, és keressük h minimumát.
A Weierstrass-tétel miatt biztosan van h-nak minimiuma.
A középpontban $h(a) = |b - y|^2 < s^2$.
A határpontokban
$|f(x) - y| = \big|(f(x) - b) - (y - b)\big| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$, ezért $h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$. A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a h függvény.
Legyen x_0 a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát $h' = 0$:

$$0 = h'(x_0) = 2\big(f(x_0) - y\big)^t \cdot f'(x_0) = 0.$$

Az $f'(x_0)$ invertálható, tehát $f(x_0) - y = 0$.
Találtunk olyan $x_0 \in B(a, r_0) \subset B(a, r)$ pontot, amire $f(x_0) = y$.

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0|$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$x_0 = x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|.$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$x_0 = x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|.$$

Legyen

$$x_1 = a; \qquad x_{n+1} = x_n - A^{-1}\big(f(x_n) - y\big)$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$x_0 = x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|.$$

Legyen

$$x_1 = a; \qquad x_{n+1} = x_n - A^{-1}\big(f(x_n) - y\big)$$

Ha ez konvergens, $x_n \to x_0$, akkor

$$x_0 = x_0 - A^{-1}\big(f(x_0) - y\big)$$

A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az $f(x) = y$ egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

Heurisztika: Ha $f(x_0) - y$, és x közel x_0-hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$x_0 = x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|.$$

Legyen

$$x_1 = a; \qquad x_{n+1} = x_n - A^{-1}\big(f(x_n) - y\big)$$

Ha ez konvergens, $x_n \to x_0$, akkor

$$x_0 = x_0 - A^{-1}\big(f(x_0) - y\big)$$

$$f(x_0) = y.$$

Miért lenne konvergens? Honnan tudjuk, hogy nem megy el messzire?

Válasz: Kontrakció, Banach-fixponttétel. Részletek a könyvben.

Nyílt leképezések

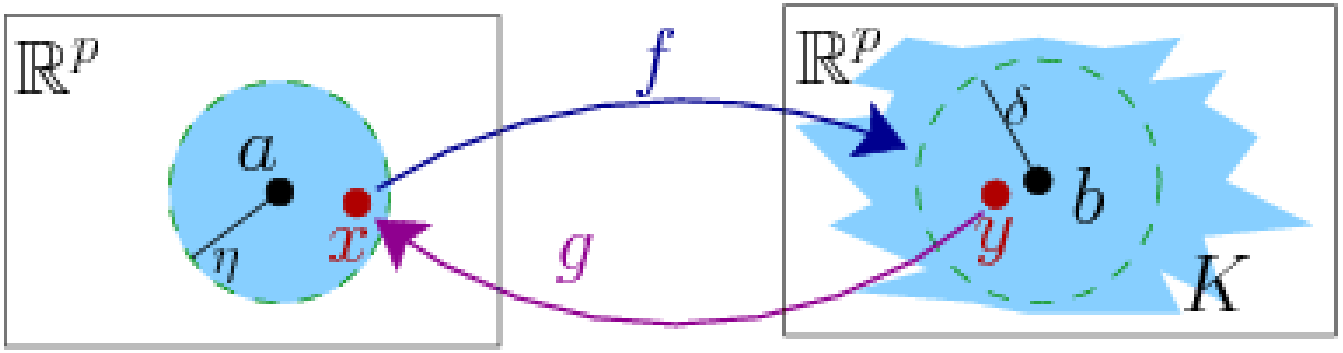
DEF. Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$, és minden $G \subset H$ halmazra a $f(G)$ halmaz nyílt, akkor f egy nyílt leképezés.

Nyílt leképezések

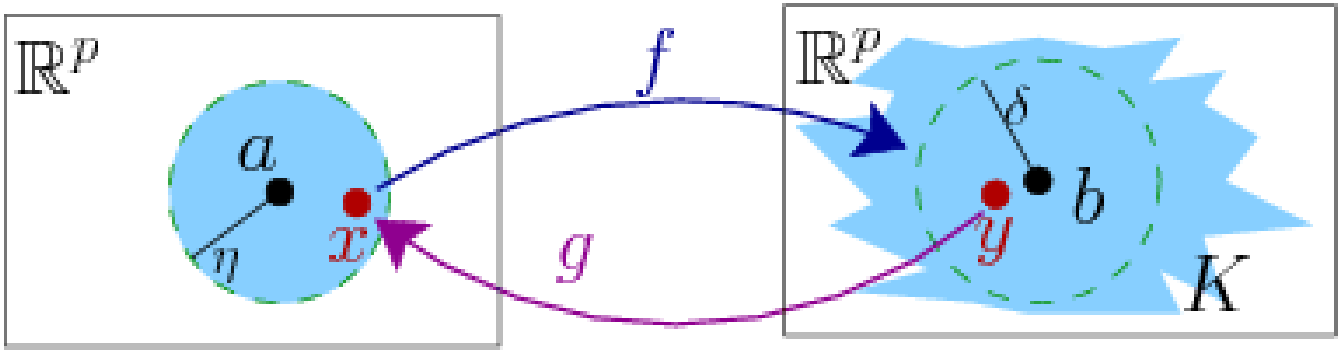
DEF. Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$, és minden $G \subset H$ halmazra a $f(G)$ halmaz nyílt, akkor f egy nyílt leképezés.

Köv (nyílt leképezés tétele). Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható, és H minden pontjában f' szürjektív, akkor f nyílt leképezés.

Inverzfüggvénytétel

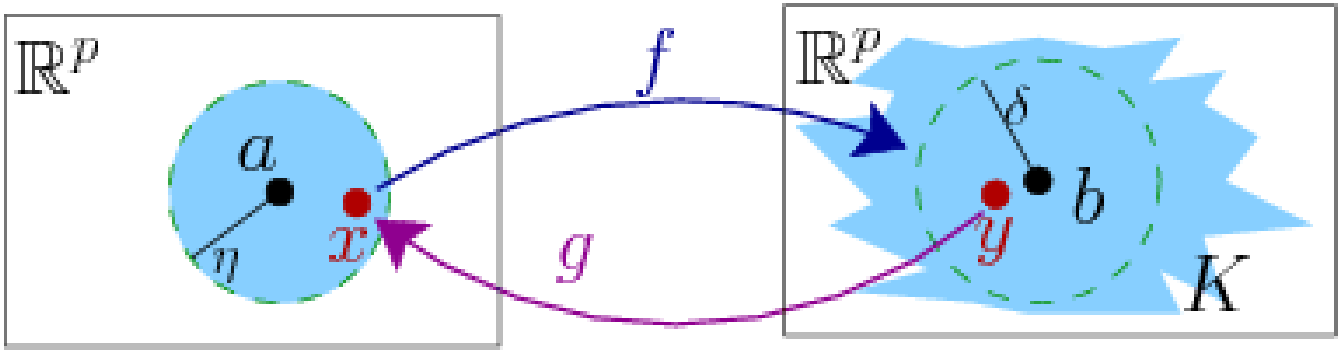


Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

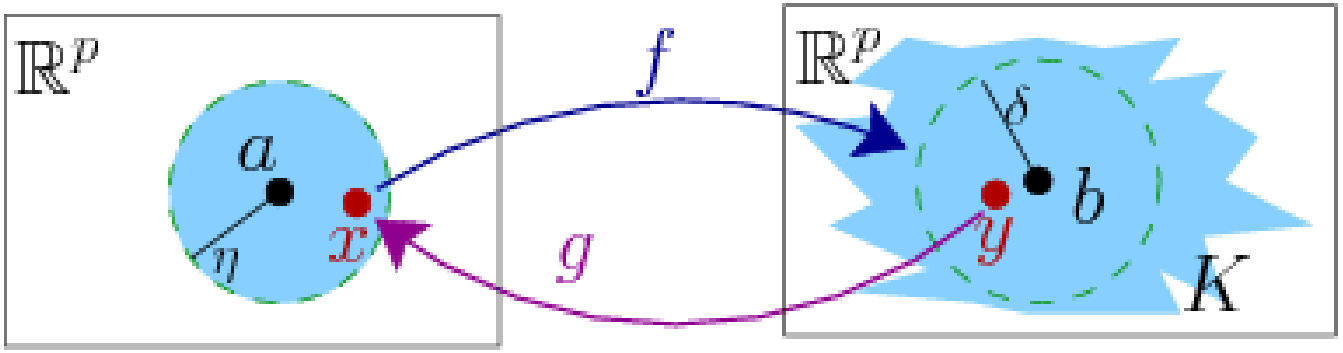
Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

Inverzfüggvénytétel

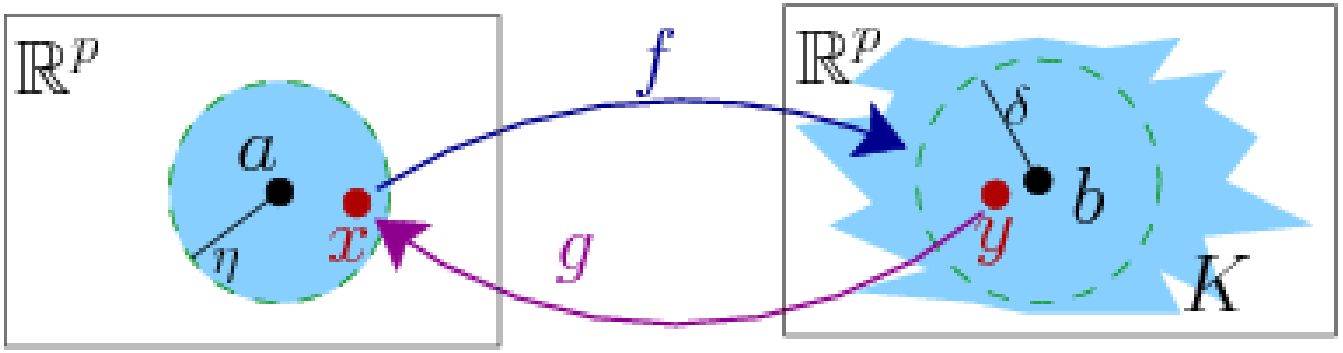


Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

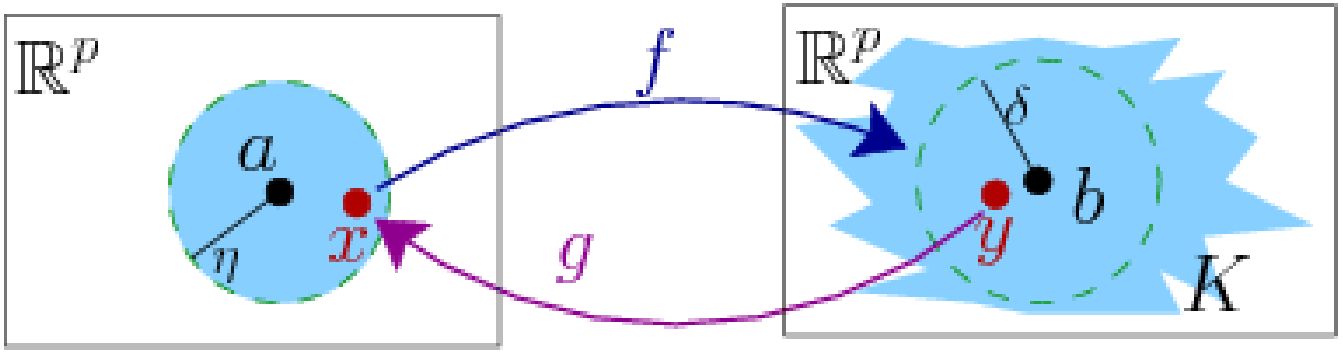
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.

Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

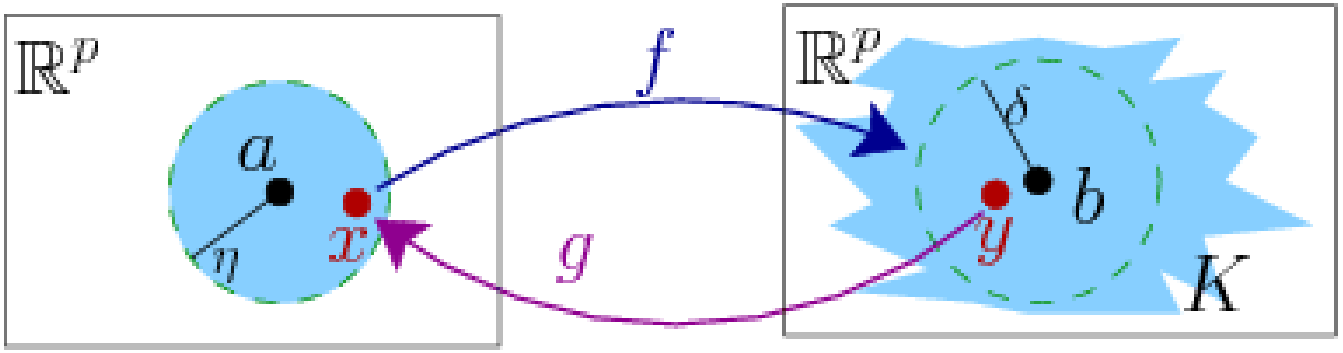
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

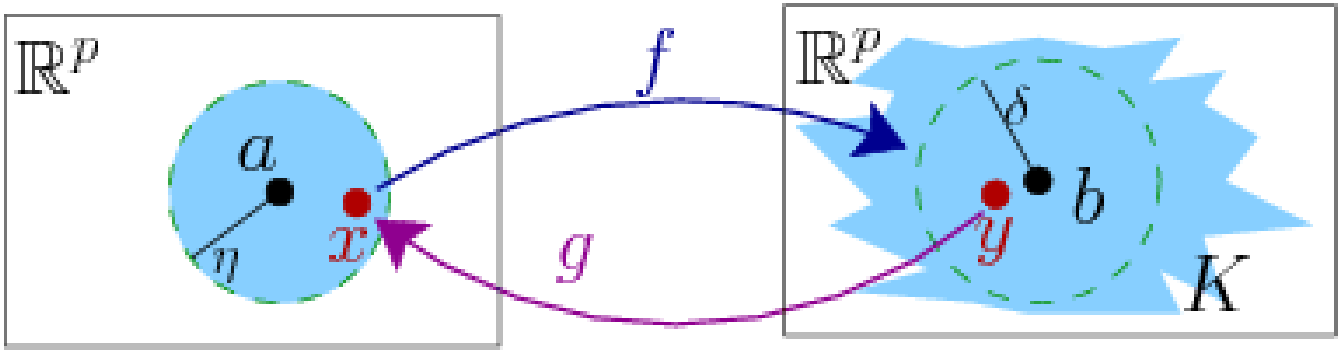
az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

(2) Az g függvény differenciálható, és g' folytonos b-ben.

Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

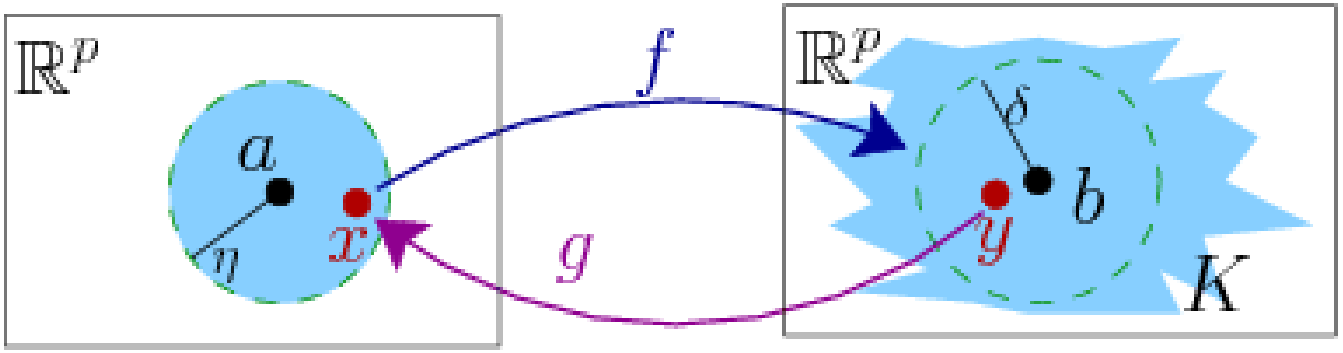
akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

(2) Az g függvény differenciálható, és g' folytonos b-ben.

(3) A $B(a, \eta)$ gömb pontjaiban f' invertálható, és $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$.

Inverzfüggvénytétel



Tétel (Inverzfüggvénytétel).
Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.

Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és

az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

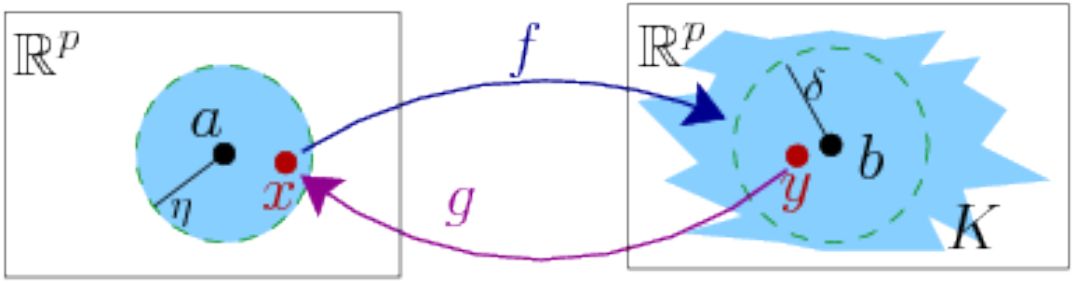
akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

(2) Az g függvény differenciálható, és g' folytonos b-ben.

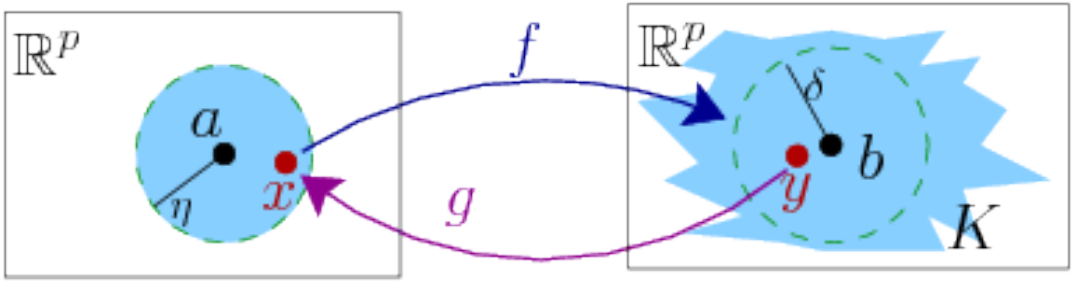
(3) A $B(a, \eta)$ gömb pontjaiban f' invertálható, és $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$.

Inverzfüggvénytétel, biz



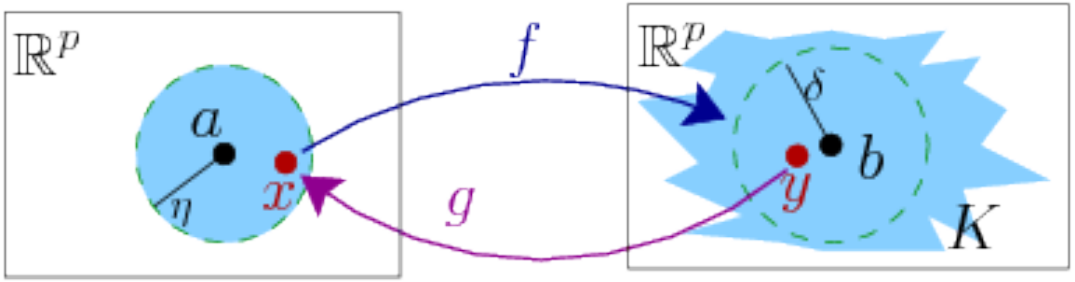
Biz.

Inverzfüggvénytétel, biz



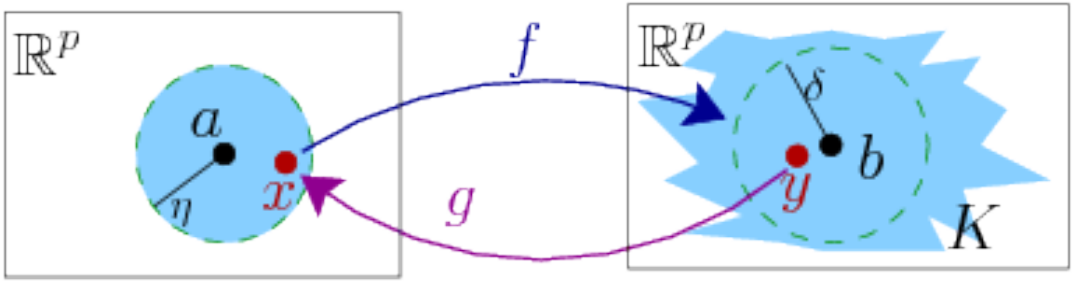
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható.

Inverzfüggvénytétel, biz



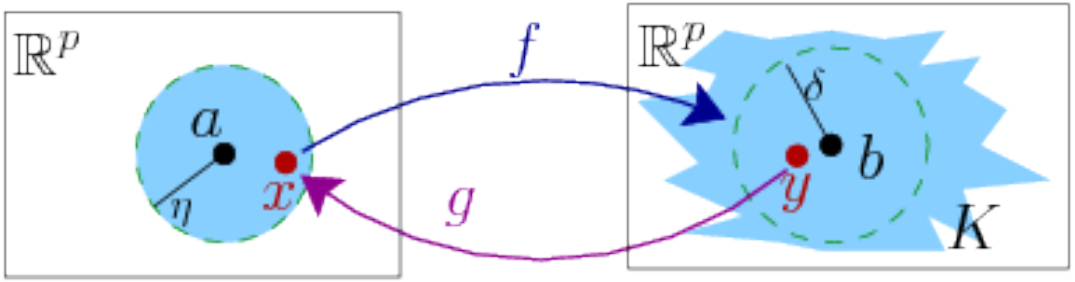
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a, \eta)$.

Inverzfüggvénytétel, biz



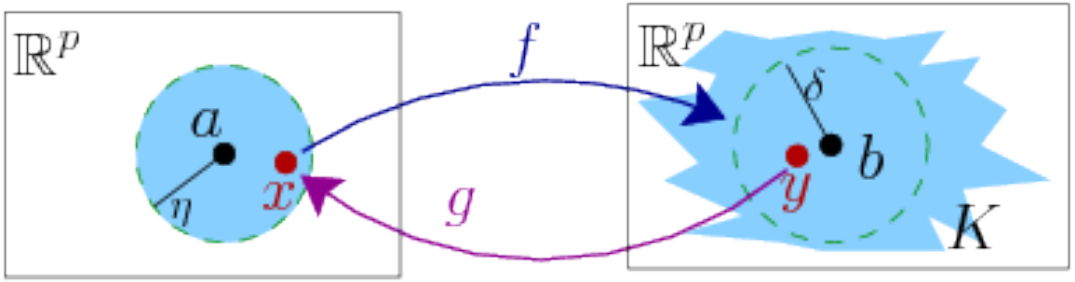
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)

Inverzfüggvénytétel, biz



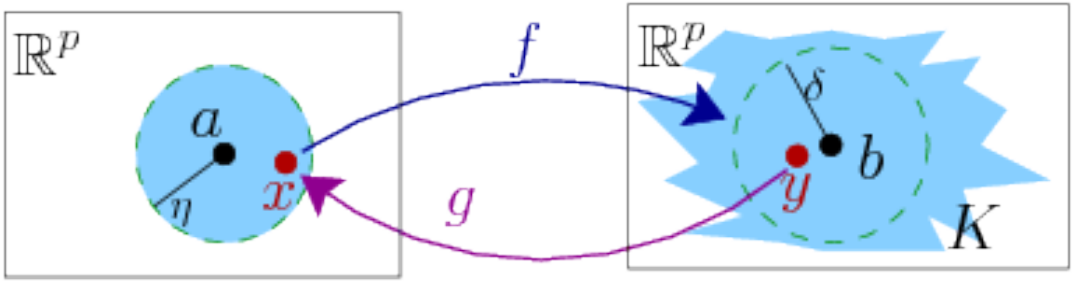
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$.

Inverzfüggvénytétel, biz



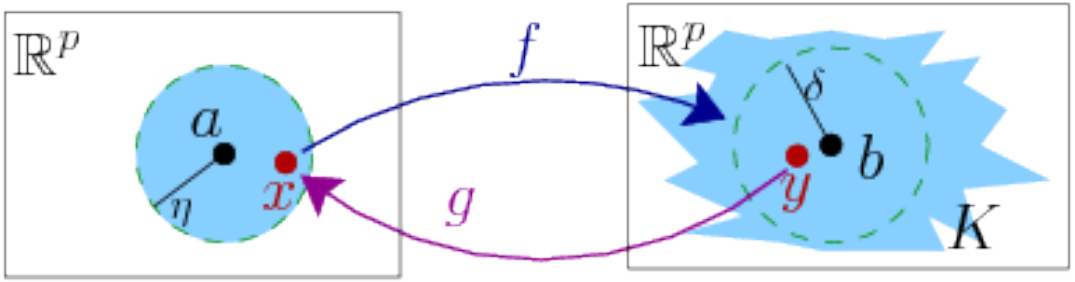
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$.

Inverzfüggvénytétel, biz



Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

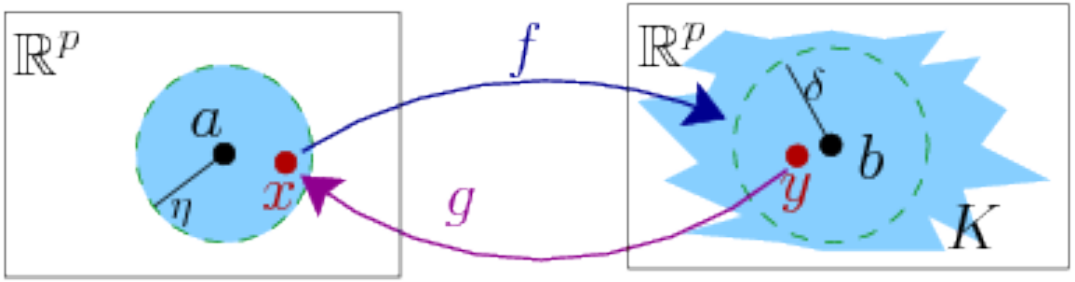
Inverzfüggvénytétel, biz



Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt.

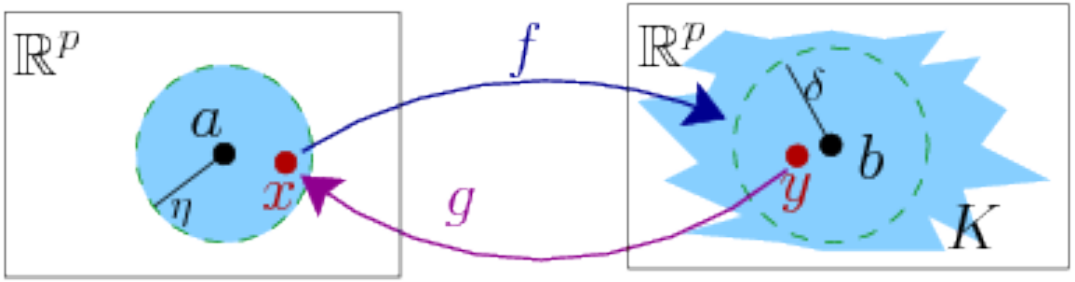
Inverzfüggvénytétel, biz



Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Inverzfüggvénytétel, biz

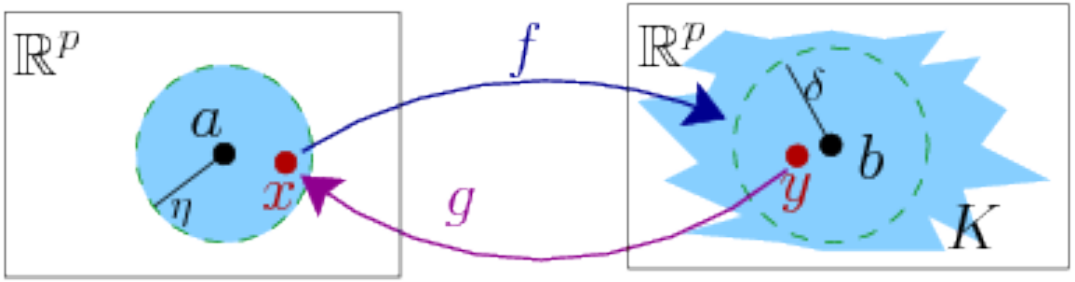


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni.

Inverzfüggvénytétel, biz

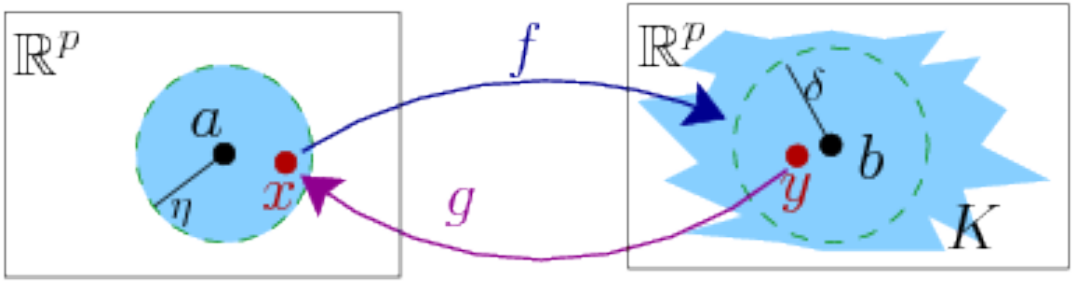


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett,

Inverzfüggvénytétel, biz

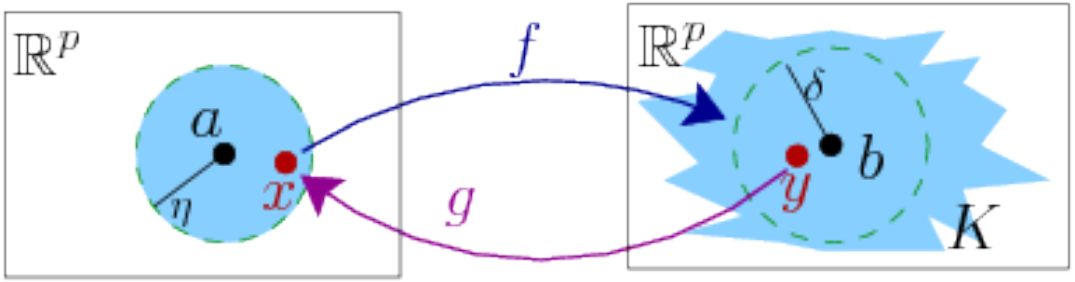


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos,

Inverzfüggvénytétel, biz

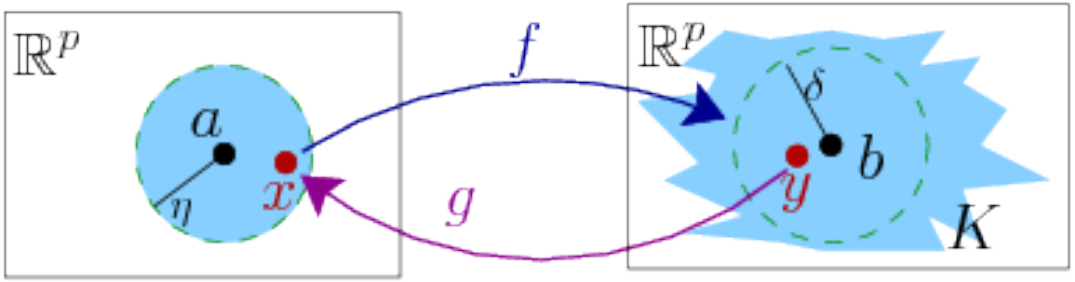


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható,

Inverzfüggvénytétel, biz

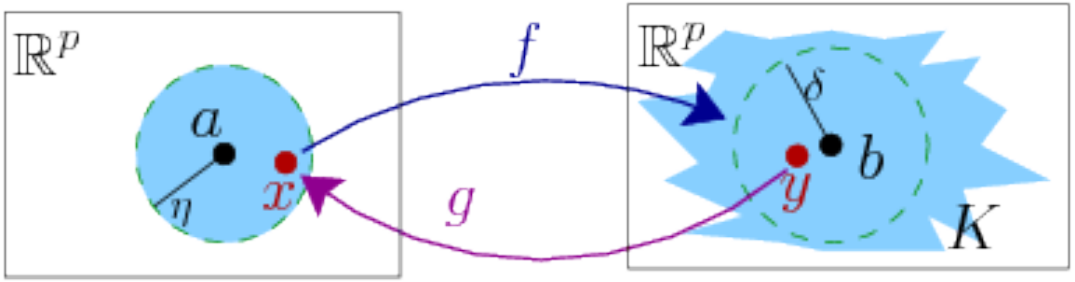


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$.

Inverzfüggvénytétel, biz

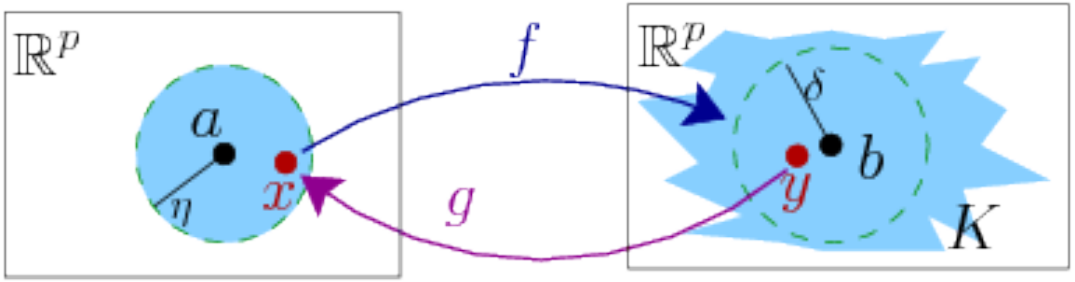


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint

Inverzfüggvénytétel, biz

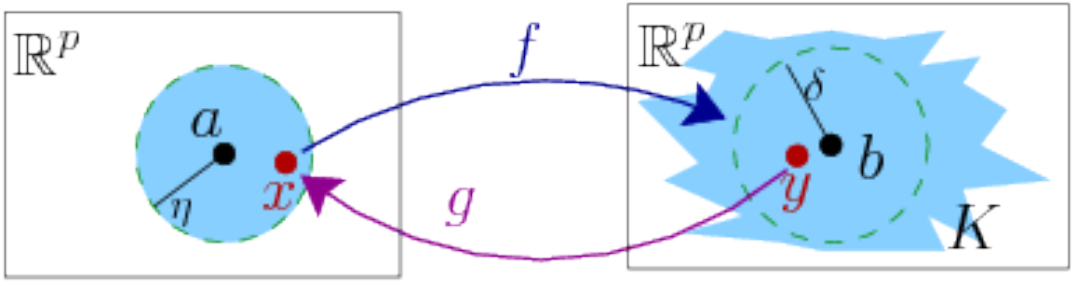


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban,

Inverzfüggvénytétel, biz

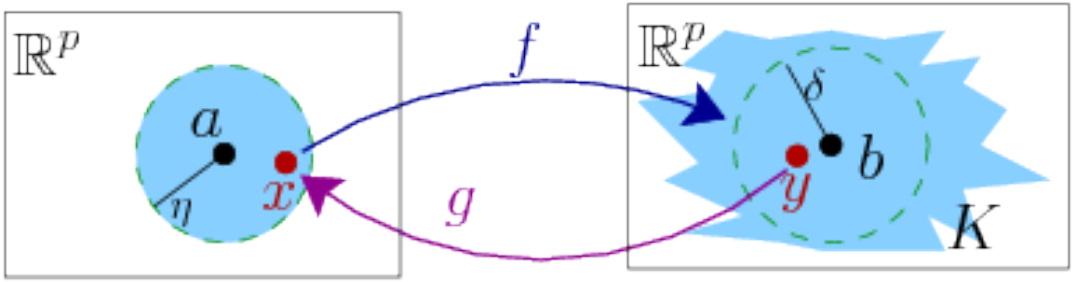


Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban, és $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Inverzfüggvénytétel, biz



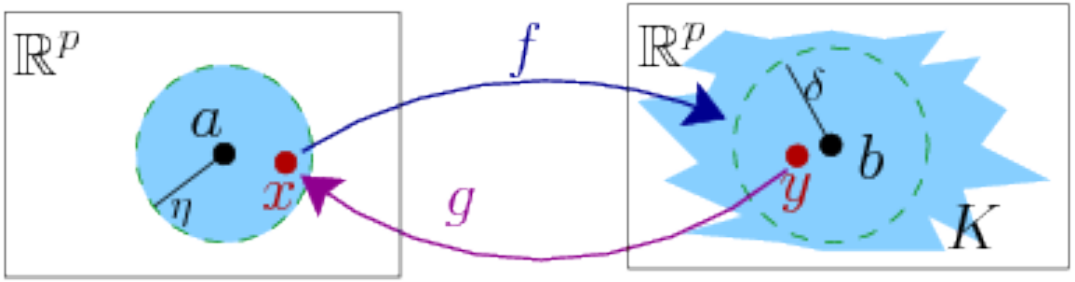
Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban, és $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

A g' folytonos b-ben: $g'(y) = \Big(f'\big(g(y)\big)\Big)^{-1}$,

Inverzfüggvénytétel, biz



Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a,\eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b,\delta) \subset f(B(a,\eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a,\eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b,\delta)$, akkor $x \in B(a,\eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a,\eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b,\delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a,\eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban, és $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

A g' folytonos b-ben: $g'(y) = \Big(f'\big(g(y)\big)\Big)^{-1}$, g folytonos y-ban, f' folytonos $g(y) = x$-ben, és a mátrixinverz is folytonos.

Implicit függvények

Implicit függvények

Függvény explicit (közvetlen) megadása: $g : (x_1, \ldots, x_p) \to (y_1, \ldots, y_q)$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

vagy

$$y = g(x)$$

Implicit függvények

Függvény explicit (közvetlen) megadása: $g : (x_1, \ldots, x_p) \to (y_1, \ldots, y_q)$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

vagy

$$y = g(x)$$

Implicit (közvetett) megadás: $g : (x_1, \ldots, x_p) \to (y_1, \ldots, y_q)$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_q(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

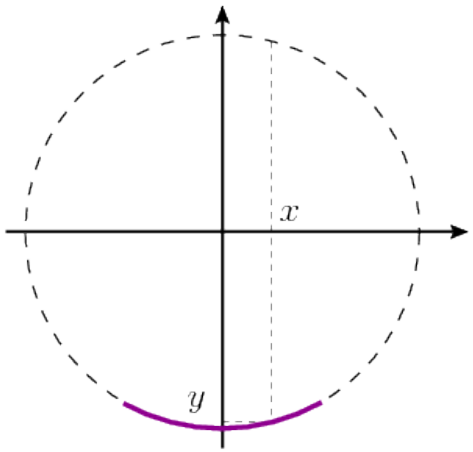
vagy

$$f(x, y) = 0_q$$

(egyenletrendszer)

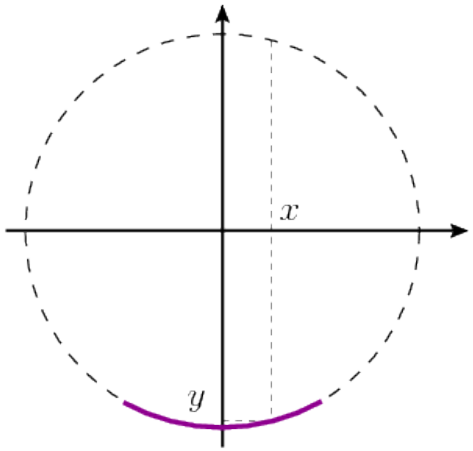
Implicit függvények

Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Implicit függvények

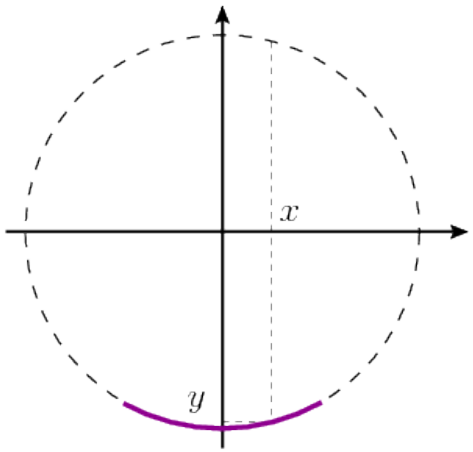
Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

Implicit függvények

Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

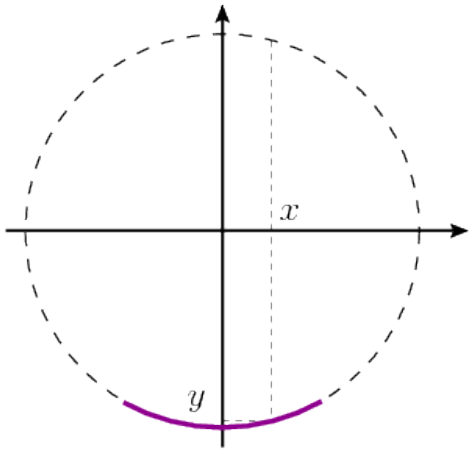


Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

Kérdés. Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek?

Implicit függvények

Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

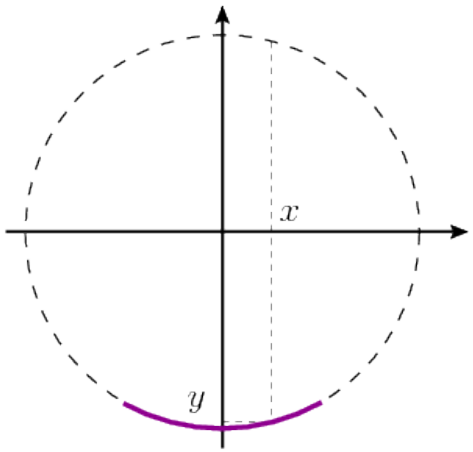


Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

Kérdés. Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

Implicit függvények

Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



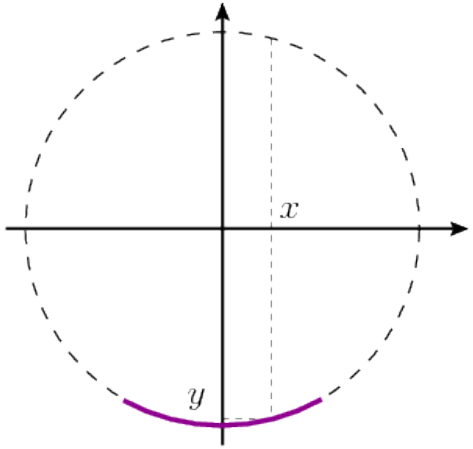
Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

Kérdés. Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

Kérdés. Ha tudunk egy (a, b) pontpárt, ami megoldása az egyenletrendszernek, lesz-e körülötte egy egyértelmű lokális megoldás, görbedarab?

Implicit függvények

Példa. Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

Kérdés. Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

Kérdés. Ha tudunk egy (a, b) pontpárt, ami megoldása az egyenletrendszernek, lesz-e körülötte egy egyértelmű lokális megoldás, görbedarab?

Kérdés. Ha van is lokális implicit függvény, biztosak lehetünk benne, hogy differenciálható? Milyen képlet adja meg a deriváltat?

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q \times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q \times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q \times p} = 0_{q \times p}$$

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q \times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q \times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q \times p} = 0_{q \times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q \times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q \times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q \times p} = 0_{q \times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

És ha $D_2 f(x, g(x))$ invertálható is, akkor

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q \times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q \times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q \times p} = 0_{q \times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

És ha $D_2 f(x, g(x))$ invertálható is, akkor

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

Érdemes lesz feltenni, hogy $D_2 f(x, g(x))$ invertálható.

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b, \eta)$ pont, amelyre $f(x, y) = 0_q$.

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b, \eta)$ pont, amelyre $f(x, y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a, \delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b, \eta)$ pont, amelyre $f(x, y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a, \delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

(3) g' folytonos az a pontban.

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b, \eta)$ pont, amelyre $f(x, y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a, \delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

(3) g' folytonos az a pontban.

Biz. Könnyebb többet bizonyítani. Az egyenletrendszer jobboldalán a 0_q vektor helyére is tegyünk egy $z \in \mathbb{R}^q$ vektort. Az új egyenlet:

$$f(x, y) = z.$$

Implicitfüggvény-tétel

Tétel (implicitfüggvény-tétel). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a, b) = 0_q$ (vagyis az (a, b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a, b) pontban, és $D_2 f(a, b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b, \eta)$ pont, amelyre $f(x, y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a, \delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

(3) g' folytonos az a pontban.

Biz. Könnyebb többet bizonyítani. Az egyenletrendszer jobboldalán a 0_q vektor helyére is tegyünk egy $z \in \mathbb{R}^q$ vektort. Az új egyenlet:

$$f(x, y) = z.$$

Azt állítjuk, hogy minden a-hez közeli x és 0_q-hoz közeli z esetén ehhez van egy egyértelmű y ami megoldása.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.
Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b)$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.
Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.
Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.
Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Ez invertálható, mert a jobb alsó sarok invertálható.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverfüggvénytételt az (a,b) pontban.
Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.
Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Ez invertálható, mert a jobb alsó sarok invertálható.

Az inverzfüggvénytétel feltételei teljesülnek; F-nek létezik egy lokális inverze az $(a,0)$ egy környezetében, és a lokális inverz folytonosan differenciálható az $(a,0)$ pontban.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$. Ez teljesíti az $f(x, g(x)) = 0_q$ függvényegyenletet, és folytonsan differenciálható az a pontban.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$. Ez teljesíti az $f(x, g(x)) = 0_q$ függvényegyenletet, és folytonsan differenciálható az a pontban.

(Félre: csak a δ, η számokat ne kellene vagdosni...)

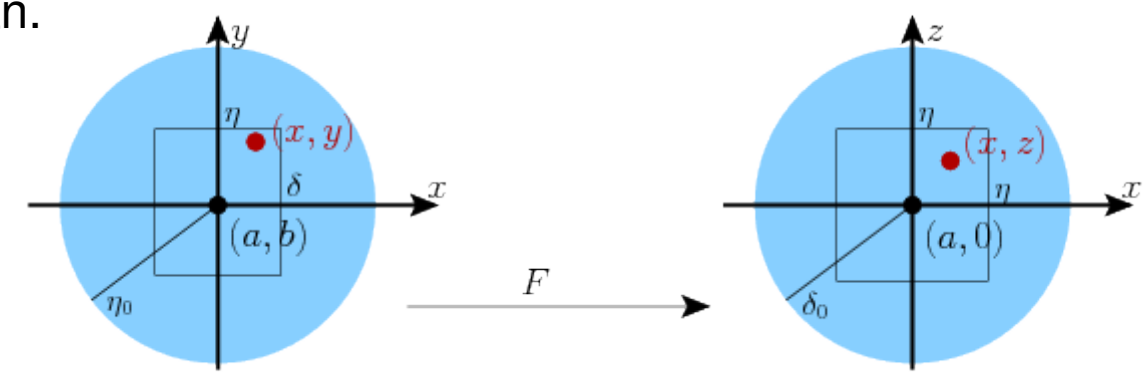
Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B((a,0),\delta_0)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B((a,b),\eta_0)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$. Ez teljesíti az $f(x, g(x)) = 0_q$ függvényegyenletet, és folytonsan differenciálható az a pontban.



Legyen $\eta = \frac{1}{2}\eta_0$. Válasszunk olyan $0 < \delta \le \delta_0$ számot, hogy minden $x \in B(a,\delta)$ esetén $|g(x)| < \eta$ is teljesüljön.

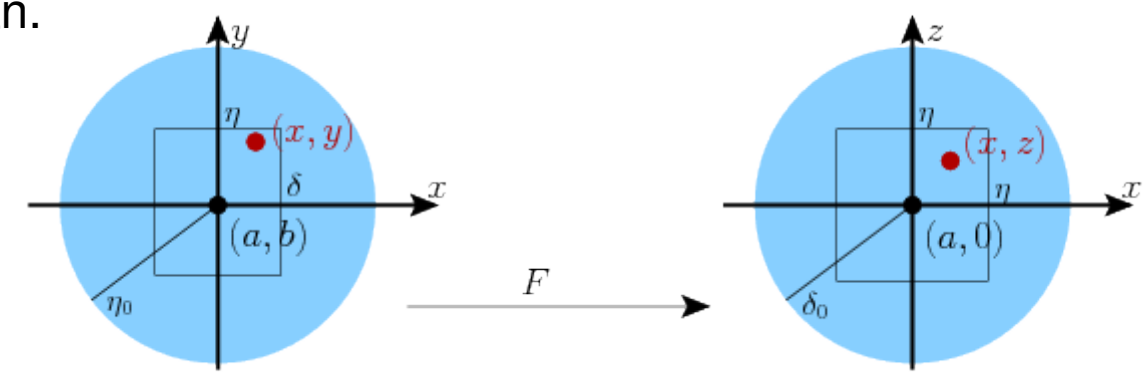
Implicitfüggvény-tétel, biz.

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x,z) \in B((a,0),\delta_0)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y) \in B((a,b),\eta_0)$ pár, amire $F(w,y) = (x,z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$. Ez teljesíti az $f(x, g(x)) = 0_q$ függvényegyenletet, és folytonsan differenciálható az a pontban.



Legyen $\eta = \frac{1}{2}\eta_0$. Válasszunk olyan $0 < \delta \le \delta_0$ számot, hogy minden $x \in B(a,\delta)$ esetén $|g(x)| < \eta$ is teljesüljön.
Ekkor tehát a kicsit nagyobb halmazon is egyértelmű $(x,y) \in B((a,b),\eta_0)$ pontunkra az is igaz, hogy $|y| = |g(x)| < \eta$.

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ -\left(D_2 f(x,y)\right)^{-1} D_1 f(x,y) & \left(D_2 f(x,y)\right)^{-1} \end{pmatrix};$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ -\left(D_2 f(x,y)\right)^{-1} D_1 f(x,y) & \left(D_2 f(x,y)\right)^{-1} \end{pmatrix};$$

Az első blokkoszlop az x, a második a z szerinti derivált, tehát

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} D_1 f(x,y) & \big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} \end{pmatrix};$$

Az első blokkoszlop az x, a második a z szerinti derivált, tehát

$$g'(x) = -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} D_1 f(x,y)$$

Implicitfüggvény-tétel, biz.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} D_1 f(x,y) & \big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} \end{pmatrix};$$

Az első blokkoszlop az x, a második a z szerinti derivált, tehát

$$g'(x) = -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} D_1 f(x,y) = -\big(D_2 f(x,g(x))\big)^{-1} D_1 f(x,g(x)).$$

Implicitfüggvény-tétel, következmények.

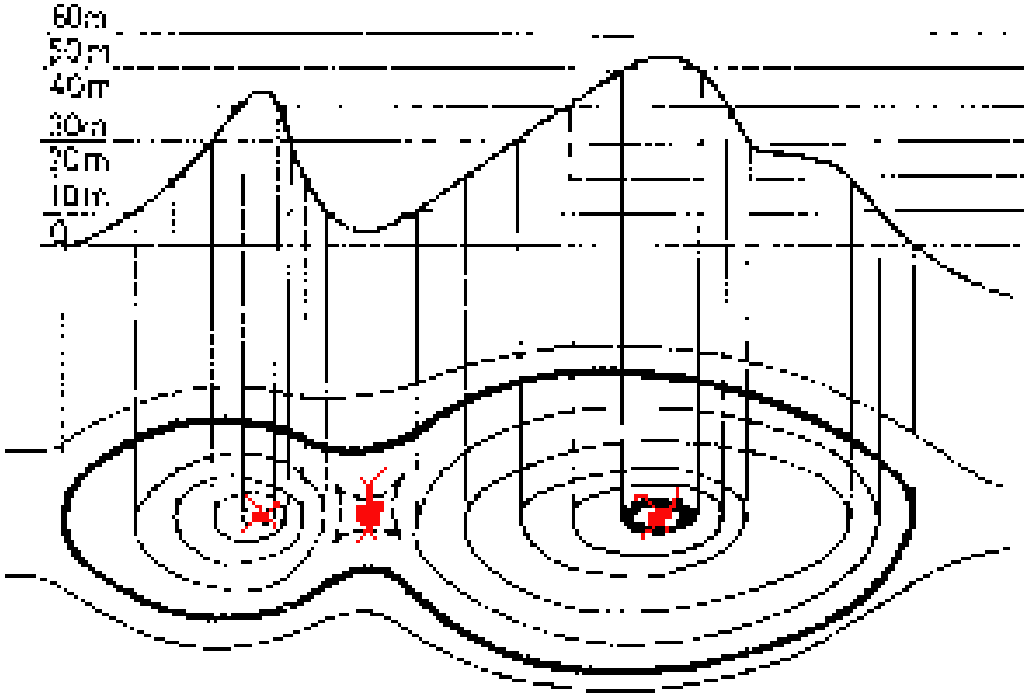
Implicitfüggvény-tétel, következmények.

$p + q$ változóra p ”független” egyenlet: q-dimenziós grafikondarab (paraméteres felület).

Implicitfüggvény-tétel, következmények.

$p + q$ változóra p ”független” egyenlet: q-dimenziós grafikondarab (paraméteres felület).

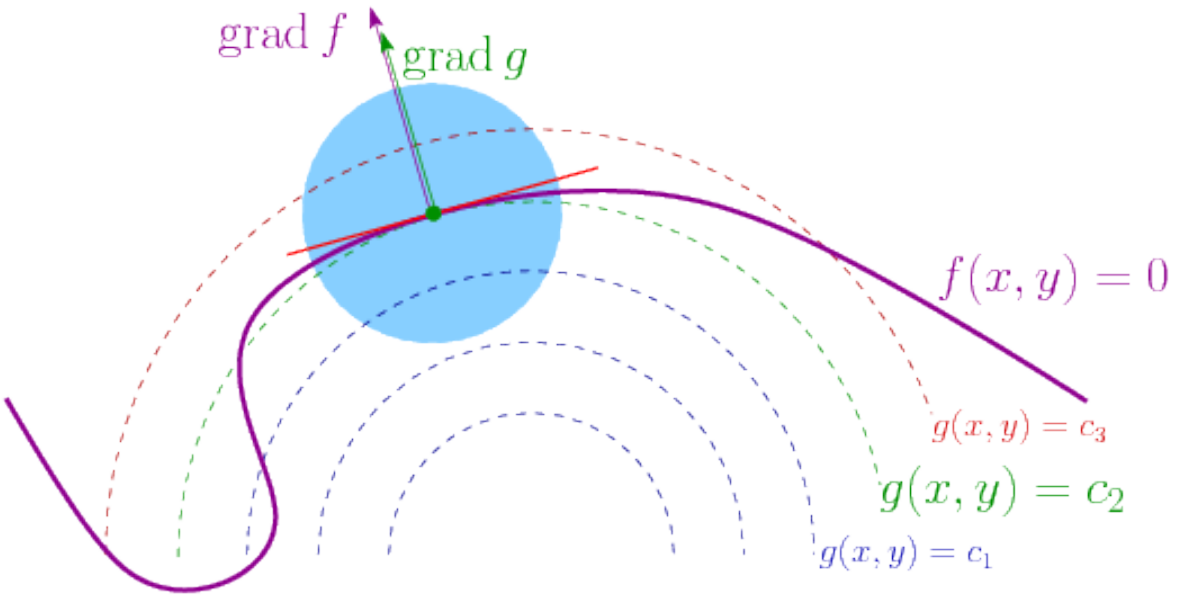
Szintvonalas térképek: ha valahol a függvény folytonsan differenciálható, és a gradiens nem a nullvektor, ott a szintvonal (valamilyen függvényérték ősképe) lokálisan egy folytonosan differenciálható görbedarab.



Feltételes lokális szélsőértékek

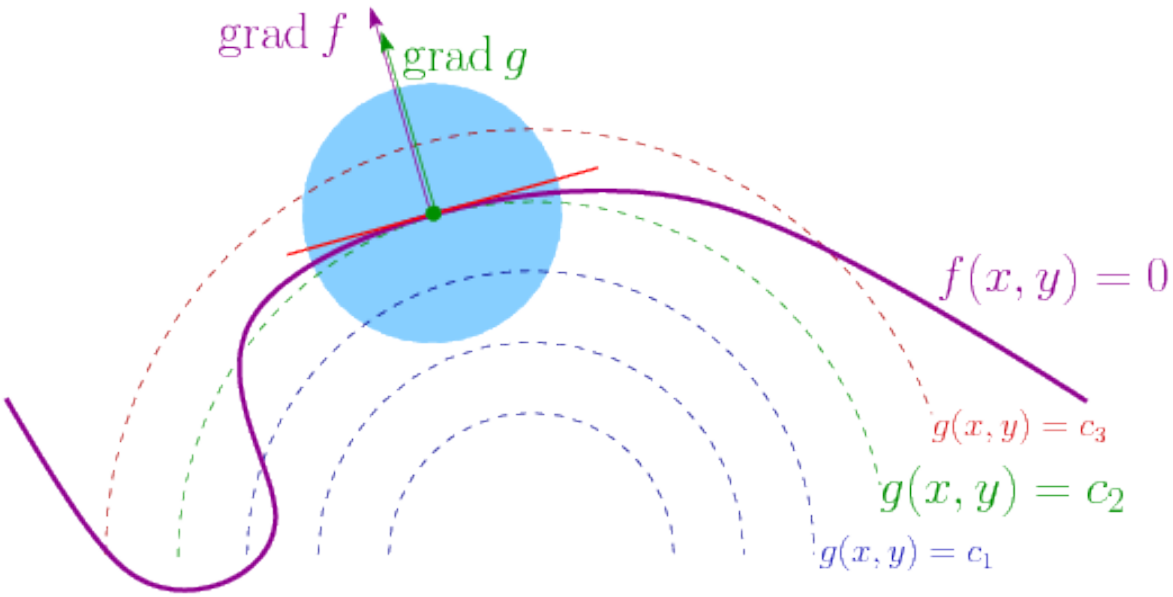
Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x, y) = 0$ görbén.



Feltételes lokális szélsőértékek

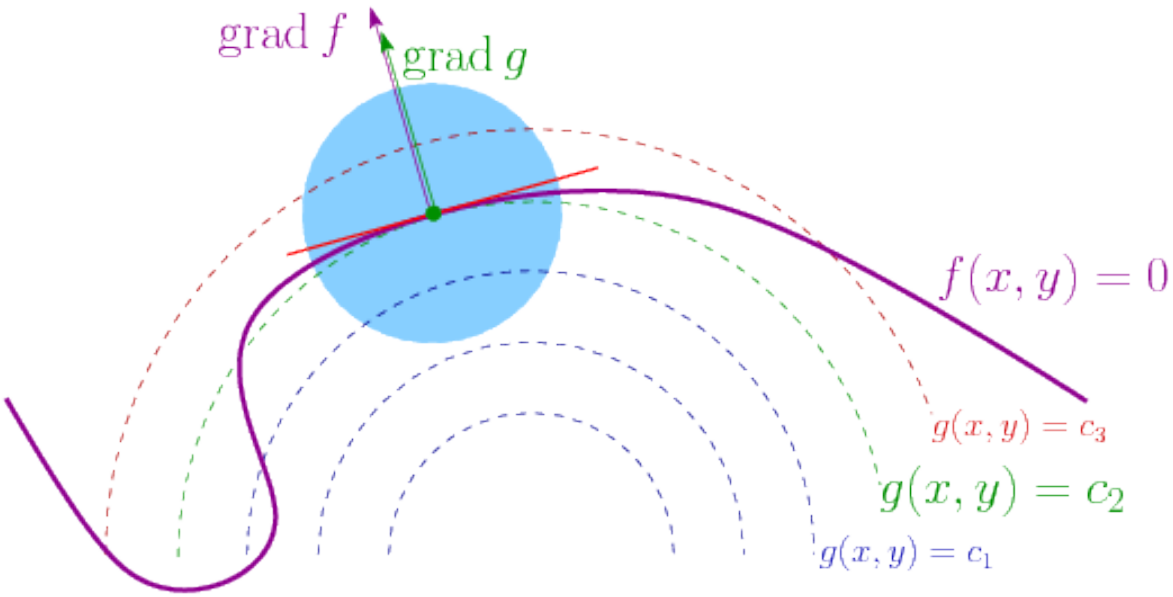
Példa. A $g(x, y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x, y) = 0$ görbén.



Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ párhuzamos, mert a görbe irányában f és g iránymenti deriváltja 0.

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x, y) = 0$ görbén.

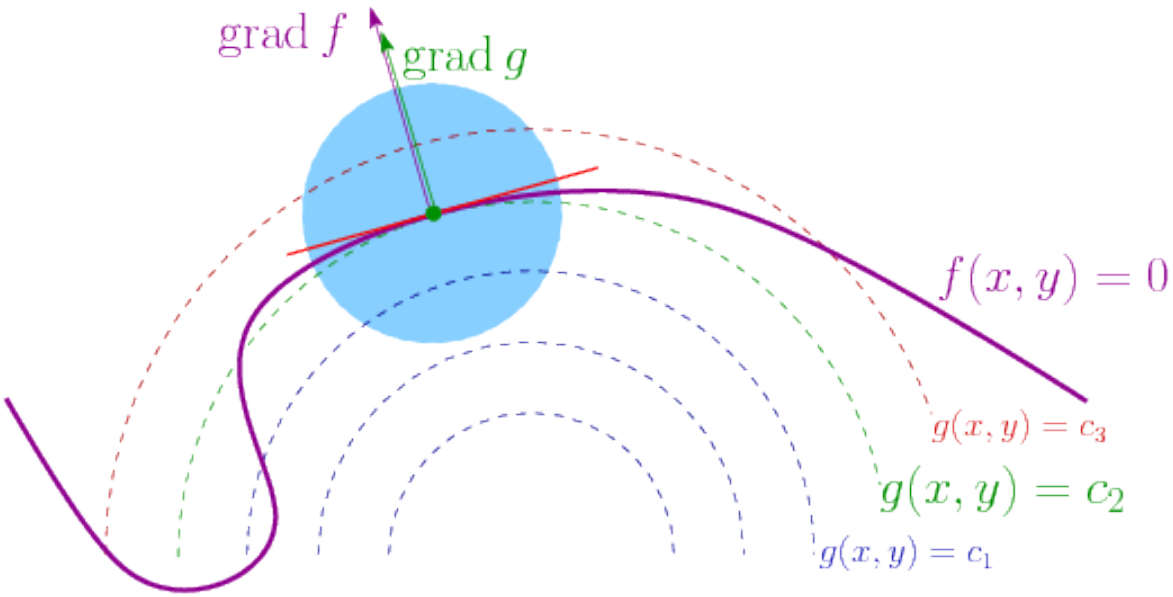


Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ párhuzamos, mert a görbe irányában f és g iránymenti deriváltja 0.

$\operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f$?

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x, y) = 0$ görbén.

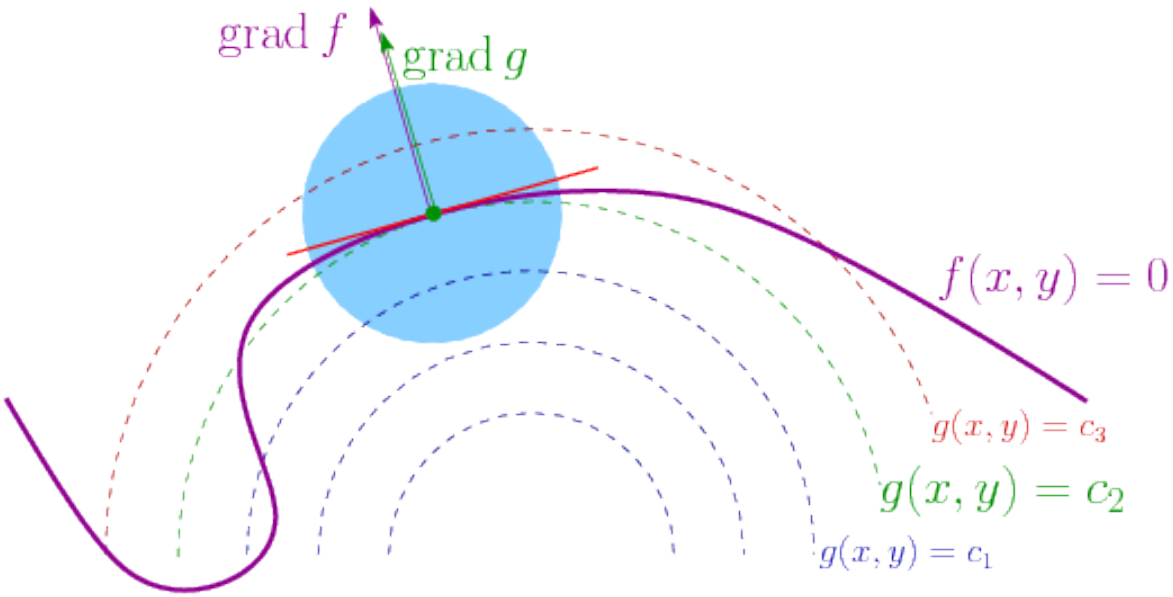


Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ párhuzamos, mert a görbe irányában f és g iránymenti deriváltja 0.

$\operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f$? $\qquad \lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f$?

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x, y) = 0$ görbén.

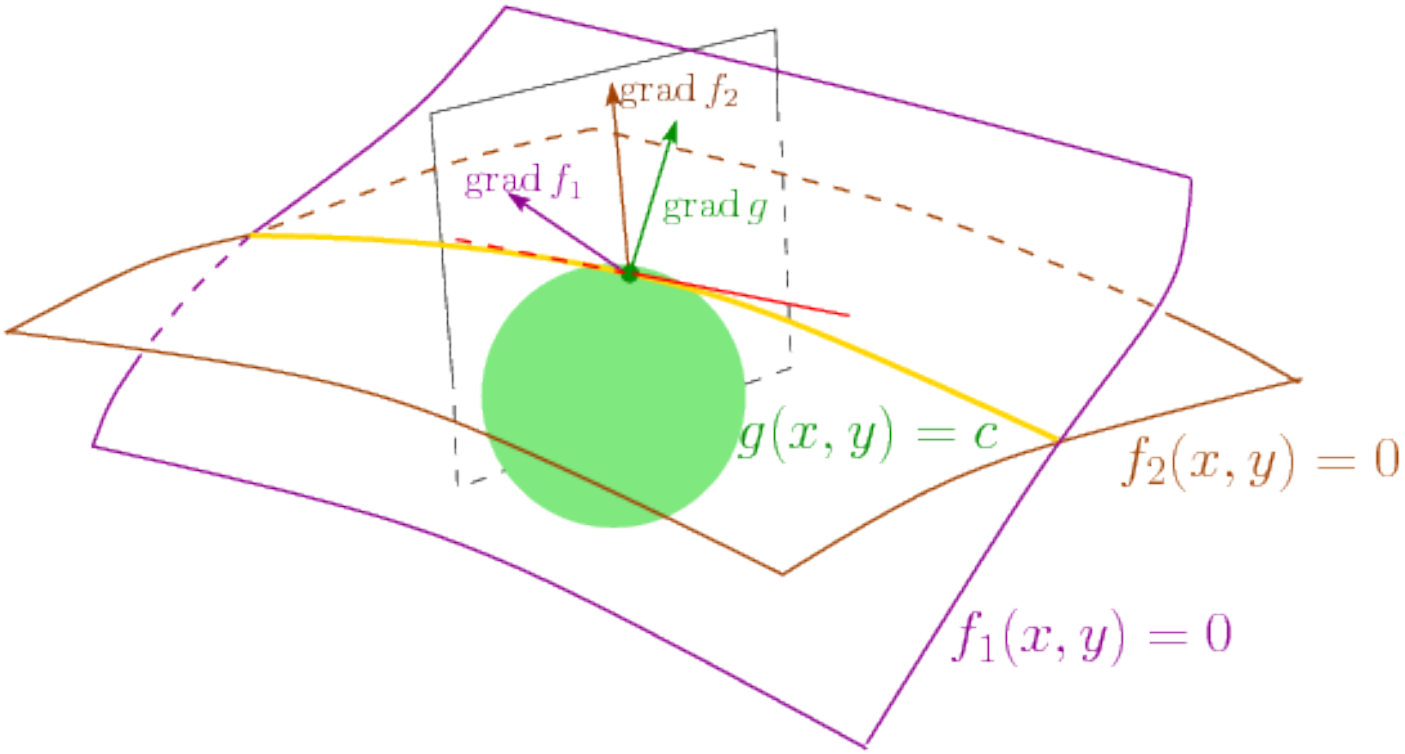


Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ párhuzamos, mert a görbe irányában f és g iránymenti deriváltja 0.

$\operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f$? $\qquad \lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f$? $\qquad \lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f$?

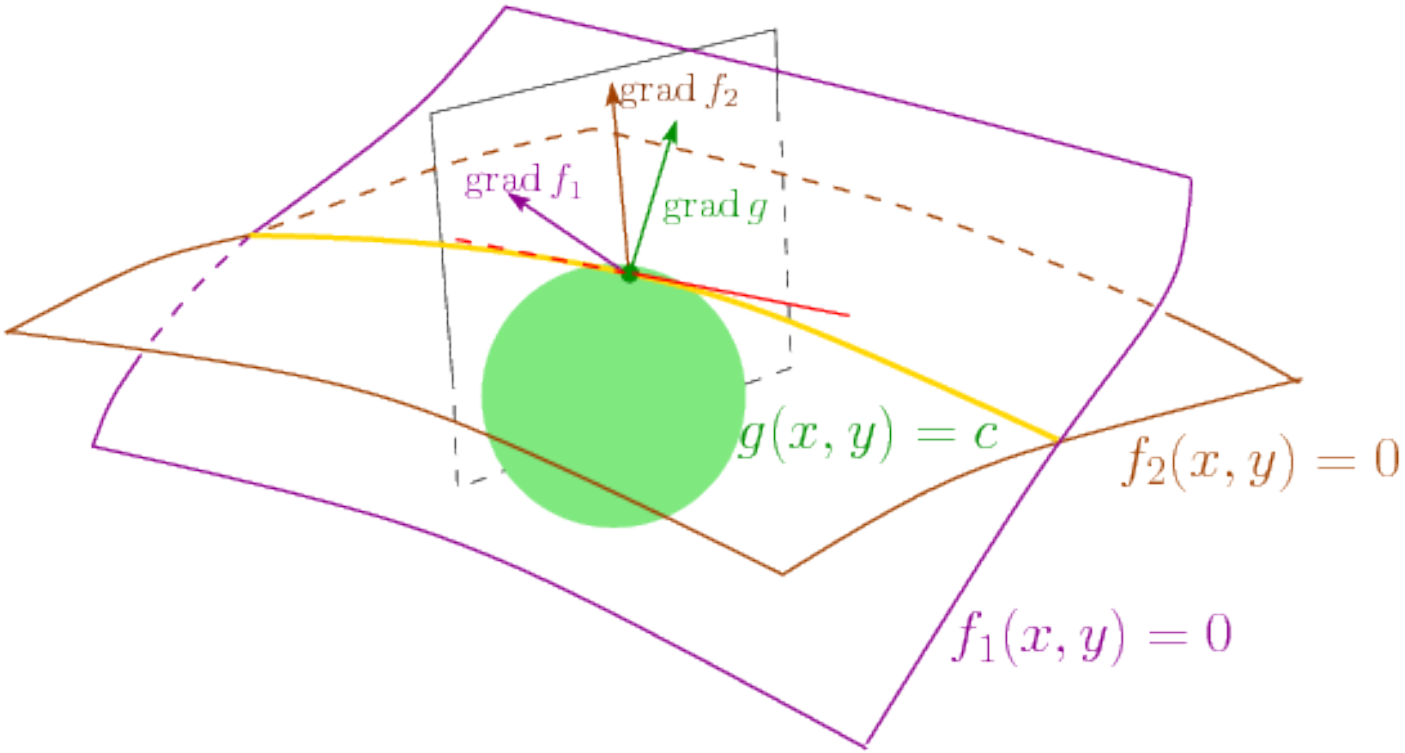
Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.



Feltételes lokális szélsőértékek

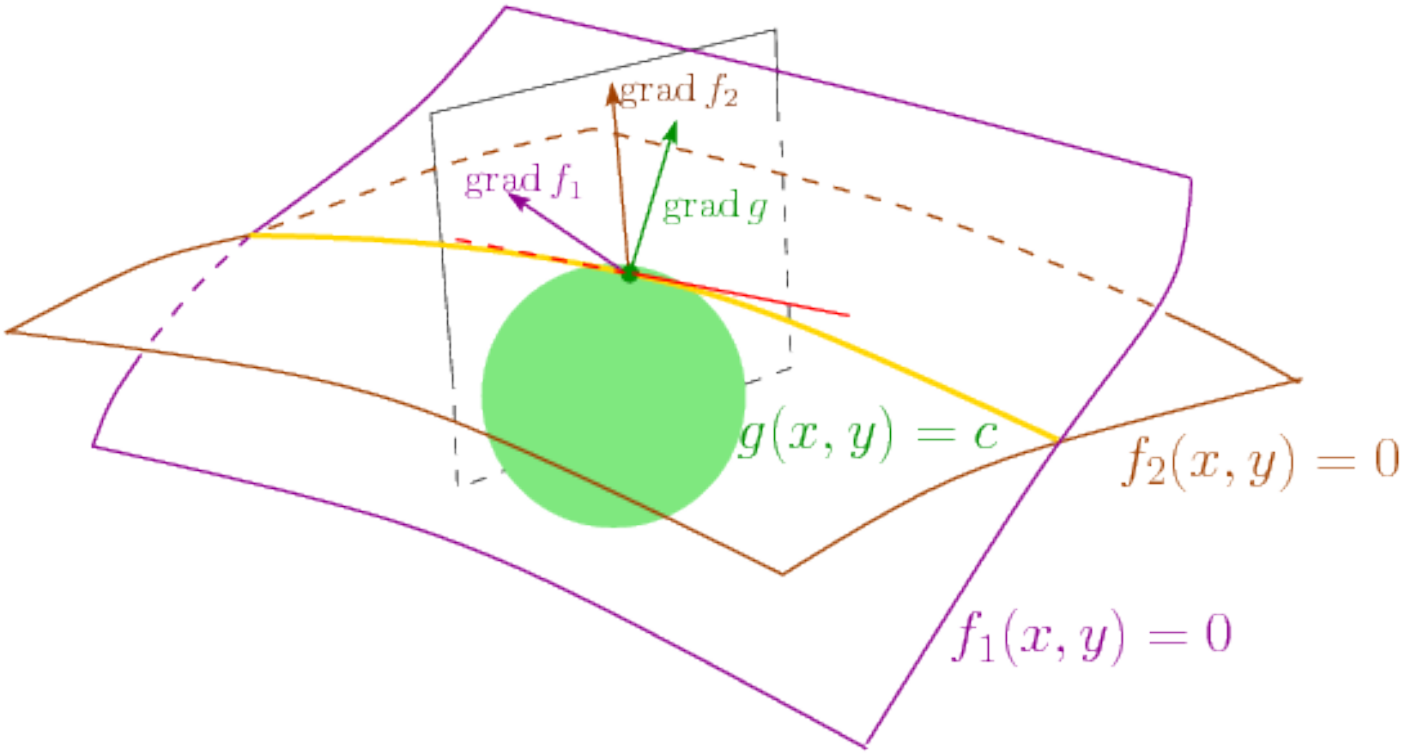
Példa. A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.



Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f_1$, $\operatorname{grad} f_2$ és $\operatorname{grad} g$ egy síkban van, mert merőlegesek a görbe "irányára".

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.

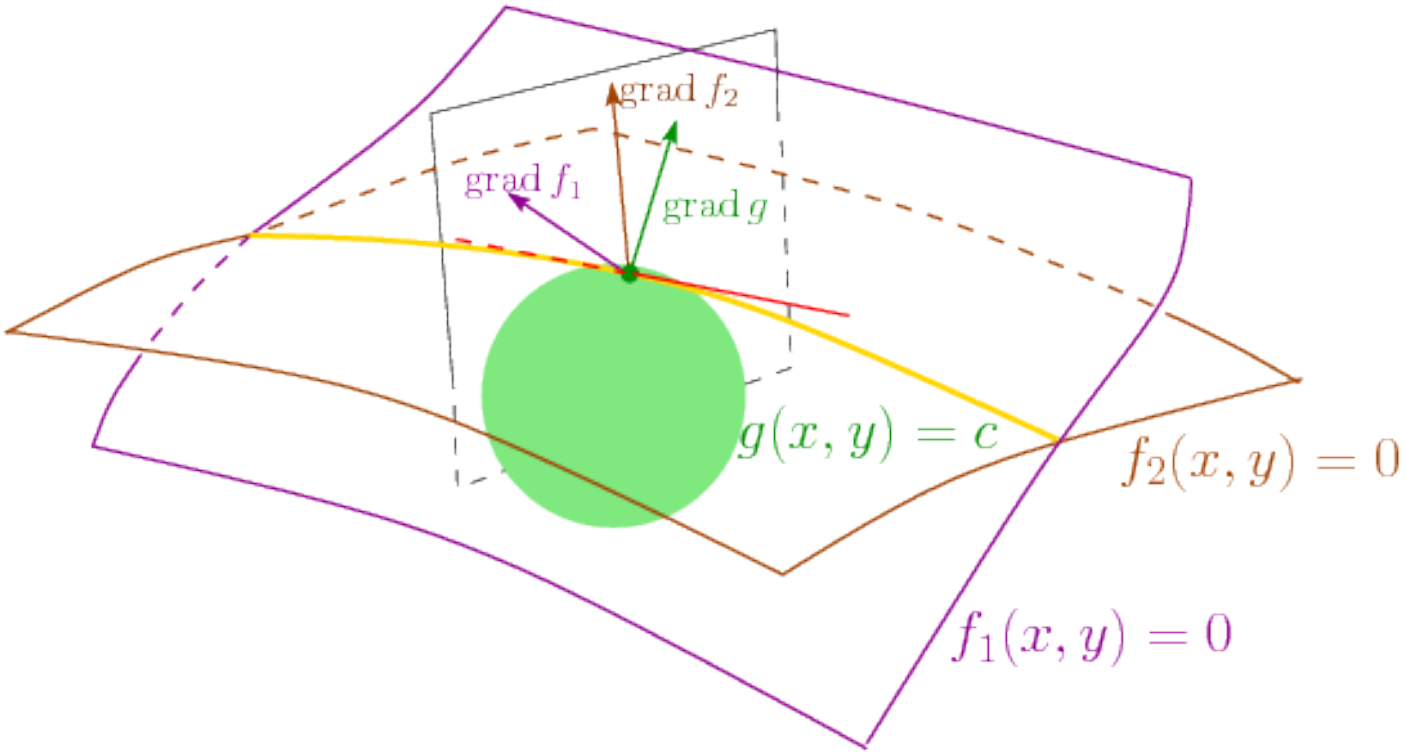


Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f_1$, $\operatorname{grad} f_2$ és $\operatorname{grad} g$ egy síkban van, mert merőlegesek a görbe "irányára".

$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$?

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.

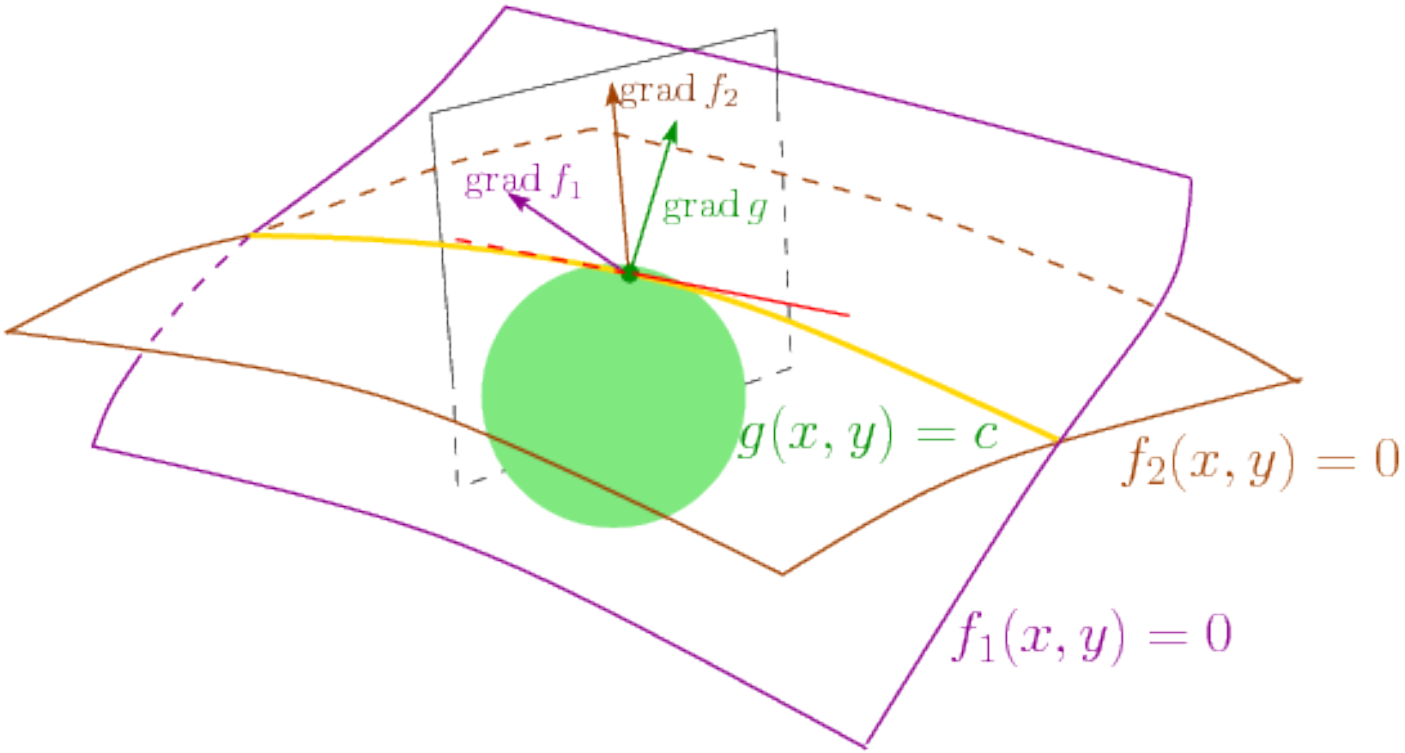


Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f_1$, $\operatorname{grad} f_2$ és $\operatorname{grad} g$ egy síkban van, mert merőlegesek a görbe "irányára".

$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$? $\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$?

Feltételes lokális szélsőértékek

Példa. A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.



Sejtésünk: a szélsőértékhelyen $\operatorname{grad} f_1$, $\operatorname{grad} f_2$ és $\operatorname{grad} g$ egy síkban van, mert merőlegesek a görbe "irányára".

$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$? $\qquad \lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$?

A $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ neve: "Lagrange-multiplikátorok"

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (”feltétel” vagy ”egyenletrendszer”), $g : H \to \mathbb{R}$ (”célfüggvény”) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (”feltétel” vagy ”egyenletrendszer”), $g : H \to \mathbb{R}$ (”célfüggvény”) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (”feltétel” vagy ”egyenletrendszer”), $g : H \to \mathbb{R}$ (”célfüggvény”) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ ("feltétel" vagy "egyenletrendszer"), $g : H \to \mathbb{R}$ ("célfüggvény") és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ ("feltétel" vagy "egyenletrendszer"), $g : H \to \mathbb{R}$ ("célfüggvény") és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (”feltétel” vagy ”egyenletrendszer”), $g : H \to \mathbb{R}$ (”célfüggvény”) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$. Ha f és g folytonosan differenciálható az a pontban, és g-nek lokális szélsőértéke van a-ban az $f = 0$ feltétel mellett,

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (”feltétel” vagy ”egyenletrendszer”), $g : H \to \mathbb{R}$ (”célfüggvény”) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$. Ha f és g folytonosan differenciálható az a pontban, és g-nek lokális szélsőértéke van a-ban az $f = 0$ feltétel mellett, akkor a $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\ldots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan összefüggőek,

Lagrange féle multiplikátor módszer

DEF. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ ("feltétel" vagy "egyenletrendszer"), $g : H \to \mathbb{R}$ ("célfüggvény") és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer). Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$. Ha f és g folytonosan differenciálható az a pontban, és g-nek lokális szélsőértéke van a-ban az $f = 0$ feltétel mellett, akkor a $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\ldots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan összefüggőek, avagy vannak olyan $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ valós számok, nem mindegyik 0, hogy

$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g(a) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1(a) + \ldots + \lambda_q \cdot \operatorname{grad} f_1(a).$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\ldots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek.

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\ldots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés.

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a, r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét.

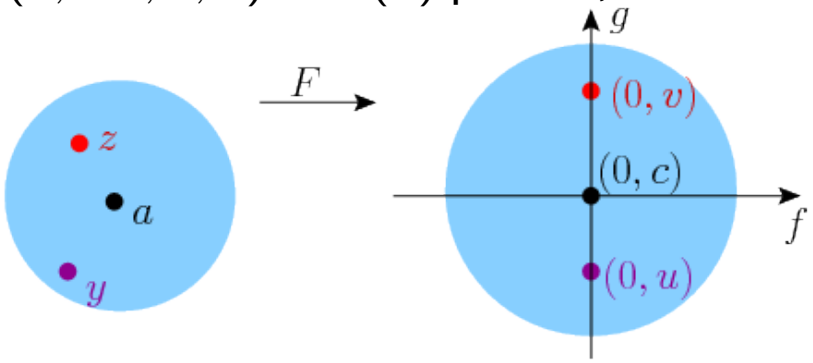
Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a, r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan $(0, \dots, 0, u) = F(y)$ pont, ahol $u < c$, és van olyan $(0, \dots, 0, v) = F(z)$ pont is, ahol $v > c$.



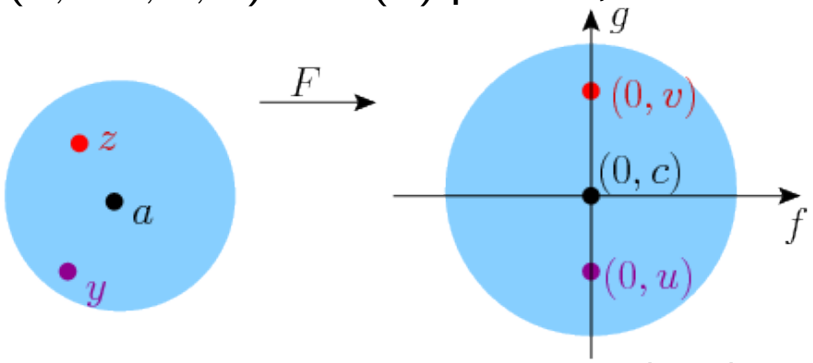
Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a, r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan $(0, \dots, 0, u) = F(y)$ pont, ahol $u < c$, és van olyan $(0, \dots, 0, v) = F(z)$ pont is, ahol $v > c$.



Tehát bármilyen $r > 0$-hoz vannak olyan $y, z \in B(a, r)$ pontok, amelyekre $f(y) = f(z) = 0_q$, $g(y) < g(a)$ és $g(z) > g(a)$.

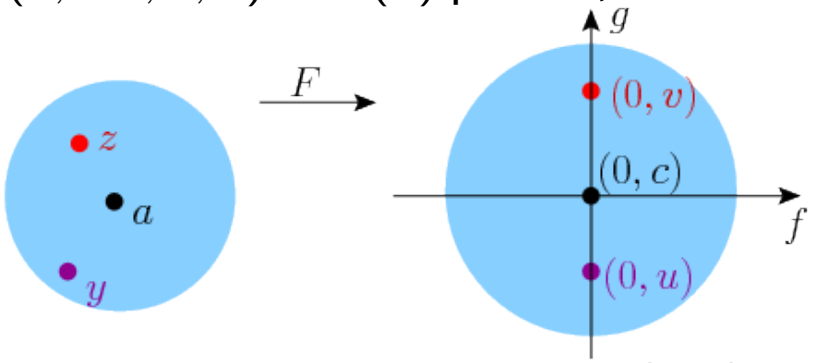
Lagrange féle multiplikátor módszer, biz.

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a, r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan $(0, \dots, 0, u) = F(y)$ pont, ahol $u < c$, és van olyan $(0, \dots, 0, v) = F(z)$ pont is, ahol $v > c$.



Tehát bármilyen $r > 0$-hoz vannak olyan $y, z \in B(a, r)$ pontok, amelyekre $f(y) = f(z) = 0_q$, $g(y) < g(a)$ és $g(z) > g(a)$. Akkor viszont g-nek nincs sem feltételes lokális minimuma, sem feltételes lokális maximuma az a pontban.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum:

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0;$$
$$2x = \lambda;$$
$$2y = 2\lambda.$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0;$$
$$2x = \lambda;$$
$$2y = 2\lambda.$$

Megoldva $\lambda = \pm 2$, $x = \pm 1$, $y \pm 2$.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0;$$
$$2x = \lambda;$$
$$2y = 2\lambda.$$

Megoldva $\lambda = \pm 2$, $x = \pm 1$, $y \pm 2$.

Tehát két megoldás van: $(x, y) = (1, 2)$ vagy $(x, y) = (-1, -2)$; ezek a gyanús pontok, közöttük van a minimum és a maximum is, meg az is aki csak rosszkor volt rossz helyen.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 1. példa

Példa. Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0;$$
$$2x = \lambda;$$
$$2y = 2\lambda.$$

Megoldva $\lambda = \pm 2$, $x = \pm 1$, $y \pm 2$.

Tehát két megoldás van: $(x, y) = (1, 2)$ vagy $(x, y) = (-1, -2)$; ezek a gyanús pontok, közöttük van a minimum és a maximum is, meg az is aki csak rosszkor volt rossz helyen.

Behelyettesítve $g(1, 2) = 5$, $g(-1, -2) = -5$. Tehát az $x^2 + y^2 - 5 = 0$ feltétel mellett $x + 2y$ maximuma 5, minimuma -5.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ lineárisan összefüggő.

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ lineárisan összefüggő.

$$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ lineárisan összefüggő.

$$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Ez az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x + y + z - 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \lambda_0 \cdot yz &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x \\ \lambda_0 \cdot zx &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y \\ \lambda_0 \cdot xy &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2z. \end{aligned}$$

Lagrange féle multiplikátor módszer, 2. példa

Példa. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ lineárisan összefüggő.

$$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Ez az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x + y + z - 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \lambda_0 \cdot yz &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x \\ \lambda_0 \cdot zx &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y \\ \lambda_0 \cdot xy &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2z. \end{aligned}$$

Vagy helyette

$$\begin{aligned} x + y + z - 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} yz & zx & zy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Szorgalmi házi feladat

A lokális szürjektivitás tételéhez sokkal kevesebb feltétel is elég lenne. Például a bizonyítás egy kicsi módosításával nincs is szükség arra, hogy folytonos a derivált

Vezessük le a lokális szürjektivitás tételét a Brouwer-fixponttételből, és próbáljunk minél gyengébb feltételt kitalálni, amivel a lokális szürjektivitás tétele még igaz marad.

Hogyan gyengíti ez a Lagrange multiplikátor módszer szükséges feltételeit?

Legközelebb október 9-én, kedden, személyesen folytatjuk a magasabb rendű deriváltakkal.

Legközelebb október 9-én, kedden, személyesen folytatjuk a magasabb rendű deriváltakkal.

Vége