2. Valós analízis gyakorlat, 2019. február 15.

2.1. Mennyi az a, ha

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x < 0 \\ a + x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

folytonos? Differenciálható-e f?

2.2. Találjuk ki a hatványozás differenciálási szabályát: ha az $f(x)$ és a $g(x)$ függvény differenciálható az a pontban, és $f(a) > 0$, akkor a $h = f^g$ függvény is differenciálható az a pontban, és

$$h'(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

2.3. Legyen $f(x) = x \cdot (x+1) \cdots (x+100)$, és legyen $g = f \circ f \circ f$. Számítsuk ki $g'(0)$ értékét.

2.4. Legyen $a, b > 0$. Bizonyítsd be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ görbék merőlegesen metszik egymást.

Házi feladatok

2.5. Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \leq 1$, és $f(x) = ax + b$, ha $x > 1$. Milyen a és b értékekre lesz f mindenütt differenciálható?

2.6. Az x^x függvény szig. mon. nő az $[1, \infty)$ intervallumban. Mi az inverzének a deriváltja a 27-ben?

2.7. Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_n$ differenciálható függvények, és $b_{i,j}$ valós számok minden $2 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq n$ esetén.

$$\left(\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & n_{2,m} \end{pmatrix} \right)' = ?$$

2.8. Legyen $a > b > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{4a(a-x)}$ és $\sqrt{4b(b+x)}$ függvények grafikonjai merőlegesen metszik egymást.

2.9. Bizonyítsuk be, hogy ha $u \in (-1, 1)$ a $T_k(x)$ Csebisev-polinom egyik gyöke, akkor

$$|T_k'(u)| = \frac{k}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM1. (beadható március 15-ig) Bizonyítsuk be, minden monoton növő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható legalább egy pontban.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`