3. Valós analízis gyakorlat, 2019. február 20.

3.1. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

3.2. A Lagrange-középértéktételből vezessük le, hogy $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \le |x-y|$, teljesül $\forall x, y \in \mathbb{R}$-re.

3.3. A Rolle-középértéktétel segítségéval bizonyítsuk be, hogy az $x^7 + 8x^2 + 5x - 23 = 0$ egyenletnek legfeljebb három különböző gyöke van.

3.4. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \ge 0$-re $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3.5. Tegyük föl, hogy f differenciálható $\mathbb{R}$-en, és $f' = f$. Mutassuk meg, hogy $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = ce^x$.

3.6. Legfeljebb hány különböző nullhelye lehet az $f(x) = e^x - p(x)$ függvénynek, ha p egy n-edfokú polinom?

Házi feladatok

3.7. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{tg} 7x} = ?$

3.8. Mutassuk meg, hogy ha f és g differenciálható $[a,b]$-ben, $f(a) \ge g(a)$, és $\forall x \in [a,b]$-re $f'(x) \ge g'(x)$, akkor $\forall x \in [a,b]$-re $f(x) \ge g(x)$.

3.9. Igazoljuk, hogy ha f differenciálható $\mathbb{R}$-en, és f' korlátos, akkor f Lipschitz.

3.10. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \ge 0$-re $x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

3.11. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mely minden pontban differenciálható, de f' nem korlátos $[0,1]$-en?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM3.1. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < 1$, és $0 < x < \pi$, akkor $\frac{\sin ax}{\sin x} > ae^{\frac{1-a^2}{6}x^2}$. (Beadható március 6-ig)]

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu