4. Valós analízis gyakorlat, 2019. február 22.

4.1. Egy $6,5m$ magas létrát a falnak támasztottunk, és az alját $0,25\frac{m}{s}$ sebességgel elhúzzuk a faltól. Amikor a létra alja $2,5m$-nyire van a faltól, milyen gyorsan fog a létra teteje süllyedni?

4.2. Egy $a \times b$ méretű papírból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a sarkaiból levágunk egy-egy $c \times c$-es négyzetet, és az oldalakat felhajtjuk. Hogyan válasszuk meg a c értékét, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

4.3. Egy hordóban 100 liter, 40 százalékos alkoholtartalmú pálinka van. Egy csőből percenként $0,1$ liter tiszta vízet engedünk a hordóba, és folyamatosan keverjük. Közben egy másik csövön szintén percenként $0,1$ liter keverék távozik. Mennyi idő múlva lesz a hordóban levő keverék 20 százalékos?

4.4. Az alsó és felső határértékek mintájára definiáljuk egy függvény alsó és felső deriváltját az a pontban így: $\underline{f'}(a) = \liminf\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, illetve $\overline{f'}(a) = \limsup\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (Lásd még: bal-alsó, jobb-felső stb. derivált.)

Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?

(a) Az f függvény a-ban lokálisan növekedő. (b) Az f függvény a-ban lokálisan szigorúan növekedő.

(c) $\overline{f'}(a) \geq 0$. (d) $\underline{f'}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'}(a) > 0$. (f) $\underline{f'}(a) > 0$.

Házi feladatok

4.5. Igazold, hogy $0 < x$ esetén

$$\operatorname{arc\,tg} x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.6. Milyen hosszú létrát vihetünk be egy toronyba a h magasságú ajtón, ha az ajtóval szemközti fal az ajtótól d távolságra van?

4.7. Egy $1000\,\mu F$-os kondenzátort egy $10\,k\Omega$-os ellenálláson keresztül $5\,V$ feszültséggel töltünk. Mekkora lesz a kondenzátor töltése 10 másodperc után?

4.8. Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\xi \in (a,b)$ szám, amire

$$\underline{f'}(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \overline{f'}(\xi).$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM4.1. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\det \begin{pmatrix} e^{a_1 b_1} & e^{a_1 b_2} & \ldots & e^{a_1 b_n} \\ e^{a_2 b_1} & e^{a_2 b_2} & \ldots & e^{a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_n b_1} & e^{a_n b_2} & \ldots & e^{a_n b_n} \end{pmatrix} > 0.$$

(beadható március 8-ig)

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`