6. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 1.

6.1. A Hölder-egyenlőtlenségből vezessük le, hogy $a, b, c > 0$ esetén $a + b + c \le \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$.

6.2. Egy $n \times k$-as táblázatot az $a_{i,i}$ nemnegatív számokkal töltöttünk ki ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$) és adottak a pozitív w_i súlyok, amelyek összege 1. Igazoljuk, hogy a sorösszegek súlyozott mértani közepe legalább akkora, mint az oszloponként vett súlyozott mértani közepek összege, azaz

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)^{w_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k} a_{i,j}^{w_i}\right).$$

(Lásd a Hölder-egyenlőtlenség bizonyítását.)

6.3. (a) Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 1$, akkor

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2}. \qquad \text{(Ír versenyfeladat, 1999)}$$

(b) Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 2$, akkor

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^{3/2}}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^{3/2}}{\sqrt{d+a}} \ge \sqrt{2}.$$

6.4. Legyen I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in I$. Illesszünk polinomot az $a_0, \ldots, a_n$ "alappontokra": tekintsük azt a legfeljebb n-edfokú $p(x)$ "Hermite-interpolációs" polinomot, amelyre a következő teljesül: ha az c szám k-szor szerepel $a_0, \ldots, a_n$ között, akkor $p(c) = f(c)$, $p'(c) = f'(c)$, $\ldots$, $p^{(k-1)}(c) = f^{(k-1)}(c)$. (Feltételezzük, hogy ezek a deriváltak léteznek.)

A $p(x)$-ben az x^n együtthatóját így jelöljük: $f[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, és az f függvény Newton-féle "osztott differenciájának" nevezzük az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ alappontokon.

(a) Mutassuk meg, hogy a $p(x)$ létezik és egyértelmű, és az osztott differencia nem függ az alappontok sorrendjétől.

(b) mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}
f[a] &= f(a);\\
f[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, x] &= \frac{f[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x] - f[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]}{x - a_n} \qquad \text{ha} \quad x \ne a_n;\\
f[a_0, \ldots, a_{n-1}, x, x] &= \Big(f[a_0, \ldots, a_{n-1}, x]\Big)'.
\end{aligned}$$

(c) Igazoljuk, hogy ha f n-szer differenciálható, és az $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ valós számok nem mind egyenlők, akkor

$$\exists \xi \in (a_0, a_n) \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

(Az osztott differenciákra vonatkozó középértéktétel.)

Házi feladatok

6.5. Általánosítsuk a Hölder-egyenlőtlenséget kettő helyett k szám n-esre.

6.6. Az x, y, z pozitív számokra $xyz = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \ge \frac{3}{4}. \qquad \text{(IMO feladatjavaslat, 1998)}$$

6.7. Legyen I intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor konvex, ha bármely $a, b, c \in I$ különböző számokra $f[a, b, c] \ge 0$.

6.8. Általánosítsuk a Cauchy-középértéktételt $n + 1$ alappontra és n-edik deriváltakra.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM6.1. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám és $x > 0$, akkor

$$\frac{\binom{2n}{0}}{\sqrt{x}} + \frac{\binom{2n}{2}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\binom{2n}{4}}{\sqrt{x+4}} + \ldots + \frac{\binom{2n}{2n}}{\sqrt{x+2n}} > \frac{\binom{2n}{1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\binom{2n}{3}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\binom{2n}{5}}{\sqrt{x+5}} + \ldots + \frac{\binom{2n}{2n-1}}{\sqrt{x+2n-1}}.$$

(Beadható március 15-ig)

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu