7. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 6.

7.1. (a) Igazoljuk, hogy ha $a_1, \dots, a_n > 0$ és $x_1, \dots, x_1 > 0$, akkor

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{x_1 + \dots + x_n}.$$

(A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség "Engel-féle alakja", egyesek szerint "Titu-lemma")

(b) Mi lehetne a Hölder-egyenlőtlenség "Engel-féle alakja"?

7.2. Egy-egy alkalmas függvény differenciálásával számítsuk ki a következő határértékeket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x + e^x - 2}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\log_2(1+x)}$$

7.3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = ? \qquad \lim_{x\to 1} \left((x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right) = ? \qquad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = ? \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

7.4. Gondoljuk meg, hogy a következő határértékek meghatározásában nem alkalmazható közvetlenül a L'Hospital-szabály. Miért nem? Léteznek-e a megadott határértékek?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Házi feladatok

7.5. Bizonyítsuk be a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget úgy, hogy négyzetösszeggé alakítjuk a

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

kifejezést.

7.6.

$$\lim_{x\to 0}(x + e^x)^{1/x} = ? \quad \lim_{x\to 0} \frac{2e^x + e^{-x} - 3}{\sin 2x + x^2 + \operatorname{sh} x} = ? \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos ax}{\log \operatorname{ch} bx} = ? \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = ? \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^{-2}} = ?$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM7.1. (Beadható március 21-ig.) Legyen n és k pozitív Legyen k pozitív egész és $n < k$. Mik az x^k függvény osztott differenciái az $a_0, a_1, \dots, a_n$ pontokon? (Beadható március 21-ig.)

PM7.2. (Beadható március 21-ig.) Legyen $n \geq 1$ rögzített egész. Számítsuk ki az

$$\inf_{p,f} \max_{0\leq x\leq 1} \left|f(x) - p(x)\right|$$

távolságot, ahol p az n-nél alacsonyabb fokú valós együtthatós polinomokon, f pedig a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett,

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k$$

alakú függvényeken fut végig, ahol $c_k \geq 0$ és $\sum_{k=n}^{\infty} c_k = 1$.

Schweitzer Miklós Emlékverseny, 2014

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu