

9. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 13.

Első ZH: március 19. kedd, 14:00-16:00, D-0-805 Fejér Lipót terem (a 4. csoporttal együtt)

9.1. $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx = ?$ Mi a $(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összeg?

9.2. (a) Számítsuk ki az $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ Riemann-integrált a definícióból. (Válasszunk olyan felosztást, amikor az osztópontok mértani sorozatot alkotnak.)

(b) Keressünk minden ε -hoz olyan δ -t, hogy a $[0, 10]$ intervallum bármely, δ -nál finomabb Φ felosztása esetén $|s_\Phi - I| < \varepsilon$ és $|S_\Phi - I| < \varepsilon$.

9.3. Minden $\varepsilon > 0$ -hoz mutassunk olyan δ -t, hogy ha Φ az $[0, \pi/2]$ intervallum egy δ -nál finomabb felosztása, és σ a $\sin x$ függvénynek egy Φ -hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $\left| \sigma - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \right| < \varepsilon$.

9.4. Adjunk példát $[0, 1]$ -en nem integrálható korlátos függvényre.

9.5. Mennyi a Dirichlet- és a Riemann-függvény alsó és felső integrálja $[0, 1]$ -ben?

9.6. Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvények, akkor

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Mutassunk példát olyan f, g függvényekre, amikor egyik egyenlőtlenségben sem áll egyenlőség.

Házi feladatok

9.7. (a) Számítsd ki az $I = \int_0^{10} e^x \, dx$ integrált a definícióból.

(b) Keress minden ε -hoz olyan δ -t, hogy a $[0, 10]$ intervallum bármely, δ -nál finomabb Φ felosztása esetén $|s_\Phi - I| < \varepsilon$ és $|S_\Phi - I| < \varepsilon$.

9.8. Igazoljuk, hogy ha egy $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz, akkor integrálható.

9.9. Mi lehetne az integrálközelítő összegekre vonatkozó Cauchy-kritérium?

9.10. Igazoljuk, hogy ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -ben, akkor van olyan pont, ahol folytonos.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM9.1. (Beadható: március 29-ig.)

Konstruálj olyan integrálható $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvényt, aminek minden nem elfajuló intervallumban kontinuum sok szakadási pontja van.