# B. Sc. I. Mat. Intenzív Analízis ZH, 2019. március 19.

Minden lapra írd rá nevedet, és legalább az első, kívülre kerülő oldalra a gyakorlatvezetőd nevét.

Minden feladat 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Az előadásokon szerepelt tételek, illetve az intenzív csoport gyakorlatán bizonyított állítások bizonyítás nélkül felhasználhatóak. Egyéb állításokra nem elég hivatkozni, hanem bizonyítást is kell adni, a tanult anyag felhasználásával.

A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. (De azért az első feladat könnyebb szokott lenni, mint a hetedik.) A feladatok tetszőleges sorrendben kidolgozhatóak.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

**1.** Differenciáld a következő függvényeket:

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{arctg}(x)}{(x^7+3)}}; \qquad \text{(b) } g(x) = x^{(x^{(x^{2019})})}.$$

**2.** Mutasd meg, hogy $f(x) = \sin(x) + x^3 + 7x + 2019$ egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekció, és határozd meg $(f^{-1})'(2019)$-et.

**3.** Igazold, hogy $e^x + \sin x \geq 2x + 1$ tetszőleges $x \geq 0$ esetén.

**4.** Végezz teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = (x^2 - 2x)\mathrm{e}^x$ függvényre, és ábrázold vázlatosan a grafikonját.

**5.** Határozd meg a következő határértéket: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^2}{e^x - \log(1+x) - 1}$.

**6.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvényre $f(0) = f(2)$ és $f'(1) = 0$. Igazold, hogy van olyan $\xi \in (0, 2)$, amelyre $f'''(\xi) = 0$.

**7.** Tegyük föl, hogy $f(5) > 0$ és létezik $f'(5)$. Mit tudunk mondani a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{f(5+\frac{1}{n})}{f(5)}\right)^n$ határértékről?