

10. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 20.

10.1. Igaz-e, hogy ha $|f| \in R[a, b]$, akkor $f \in R[a, b]$?

10.2. Legyen $f \in R[-a, a]$. Bizonyítsuk be, hogy

a) Ha f páros függvény, akkor $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

b) Ha f páratlan függvény, akkor $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

10.3. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények a megadott intervallumokon? Ha igen, mutassunk ε -hoz δ -t. Ha nem, mutassunk ε -t, amihez nincs δ .

a) x^2 a $(0, 1)$ -en; b) x^2 az $[1, \infty)$ -en; c) $\frac{1}{x}$ a $(0, 1)$ -en; d) $\frac{1}{x}$ az $[1, \infty)$ -en;
e) $\sin x$ az \mathbb{R} -en; f) $\sin x^2$ \mathbb{R} -en; g) $\sin \sqrt{x}$ az $[1, +\infty)$ -en.

10.4. Legyen $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Melyik állítás következik a másiktól?

(a) f Lipschitz. (b) f egyenletesen folytonos. (c) f folytonos. (d) f korlátos.
(e) f -nek van véges féloldali határértéke az intervallum végpontjaiban.

10.5. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható az I intervallumban és itt f' korlátos, akkor f egyenletesen folytonos I -n.

(b) Mutassunk példát $(0, 1)$ -en egyenletesen folytonos függvényre, ami differenciálható, de a deriváltja nem korlátos.

10.6. Legyen $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$ Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

Házi feladatok

10.7. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények a megadott intervallumokon? Ha igen, mutassunk ε -hoz δ -t. Ha nem, mutassunk ε -t, amihez nincs δ .

$$\sqrt{x}, \quad (0, \infty); \quad \sin \frac{1}{x}, \quad (0, 1); \quad x \sin \frac{1}{x}, \quad (0, 1).$$

10.8. (a) Igaz-e, hogy ha f egyenletesen folytonos (a, b) -n, akkor korlátos?

(b) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is egyenletesen folytonos?

(c) Igaz-e, hogy ha $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények, akkor $f \cdot g$ is egyenletesen folytonos?

10.9. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g integrálhatóak $[a, b]$ -n, továbbá megegyeznek $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM10.1. (Beadható: április 3-ig.)

Igazold, hogy ha egy $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos, és csak megszámlálható sok pontban szakad, akkor Riemann-integrálható.