11. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 22.

11.1. Legyen $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$ Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

11.2. Igazoljuk, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

11.3. Írjuk fel összeg helyett Riemann-integrállal, és bizonyítsuk be a következőket: számtani közép, mértani közép, p-edik hatványközép, súlyozott p-edik hatványközép, súlyozott hatványközepek közötti egyenlőtlenségek, Jensen-egyenlőtlenség, Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Hölder-egyenlőtlenség.

11.4. Mutassunk példát olyan Riemann-integrálható $[0,1] \to [0,1]$ függvényekre, amelyeknek a kompozíciója nem Riemann-integrálható.

Házi feladatok

11.5. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g integrálhatóak $[a,b]$-n, továbbá megegyeznek $[a,b] \cap \mathbb{Q}$-n, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

11.6. Igazold, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to [c, \infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n) \cdot f(2/n) \cdot \ldots \cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1] \to (0, \infty)$ függvény esetén?

11.7. Bizonyítsd be, hogy ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, akkor

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) \leq \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mutassunk példát olyan f, g függvényekre, amikor egyik egyenlőtlenségben sem áll egyenlőség.

11.8. Igazold, hogy ha f integrálható $[a,b]$-ben, akkor kontinuum sok pontban folytonos.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM11.1. (Beadható: április 5-ig.)

Az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénynek minden $c \in [0,1]$ pontban létezik véges határértéke. (Az intervallum végpontjaiban féloldali határértéke létezik.) Bizonyítsd be, hogy f integrálható.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu