

## 12. Valós analízis gyakorlat, 2019. március 27.

Március 29-n nem lesz gyakorlat! A következő gyakorlat április 3-án lesz.

**Határozott integrálok kiszámítása előtt előbb mindig becsüljük meg az eredményt! Milyen végeredményt hiszünk el?**

**12.1.** Adjuk meg a  $[-2, 3]$  intervallumon az alábbi függvények összes primitív függvényét, integrál-függvényét, határozatlan integrálját és határozott integrálját!

$$|x|; \quad \operatorname{sgn} x; \quad 1 + x^2 \operatorname{sgn} x$$

**12.2.** Legyen  $f(x) := \int_0^x \log(1 + t^2) dt$ , ha  $x \geq 0$ .  $f'(x) = ?$

**12.3.** Mely állítások igazak tetszőleges  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre?

- (a) Ha  $f$  korlátos, akkor Riemann-integrálható.
- (b) Ha  $f$  korlátos, akkor van primitív függvénye.
- (c) Ha  $f$ -nek van primitív függvénye, akkor integrálható.
- (d) Ha  $f$ -nek van primitív függvénye, akkor nem integrálható.
- (e) Ha  $f$ -nek van primitív függvénye, akkor korlátos.
- (f)  $f$ -nek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha az integrálfüggvénye primitív függvény.
- (g) Ha  $f$  integrálható, és az integrálfüggvénye differenciálható, akkor az integrálfüggvény deriváltja azonos  $f$ -fel.
- (h) Ha  $f$  monoton nő, akkor az integrálfüggvénye konvex.
- (i) Ha  $f$  integrálfüggvénye konvex, akkor  $f$  monoton.
- (j) Ha  $f$  Darboux-tulajdonságú, akkor van primitív függvénye.

**12.4.** Legyen  $f(x) := \int_0^x \log(1 + t^2) dt$ , ha  $x \geq 0$ .  $f'(x) = ?$

**12.5.**

$$\int (1 + x + x^2) dx = ? \quad \int_0^1 (1 + x + x^2) dx = ? \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = ? \quad \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = ?$$

**12.6.** Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \quad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \quad \int_0^1 \operatorname{sh} x dx \quad \int_0^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \int_0^1 2^x dx$$

**12.7.** Számítsuk ki lineáris helyettesítéssel:

$$\int \operatorname{ctg}(2 - 3x) dx \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + x^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-1 + x + x^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$$

**12.8.** Alakítsuk  $\int f^\alpha \cdot f'$  vagy  $\int (f \circ g) \cdot g'$  alakúvá, és számítsuk ki:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx; \quad \int \frac{\log^3 x}{x} dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x^4 + x^2} dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^{-2x} - 1}}$$

## Házi feladatok

**12.9.** Mely állítások igazak tetszőleges  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre?

- (a) Ha  $f$  integrálható, akkor van primitív függvénye.
- (b) Ha  $f$  integrálható, akkor nincs primitív függvénye.
- (c) Ha  $f$  integrálható, akkor korlátos.
- (d) Ha  $f$  integrálható, akkor Darboux-tulajdonságú.
- (e) Ha  $f$ -nek van primitív függvénye, akkor Darboux-tulajdonságú.
- (f) Ha  $f$  primitív függvénye konvex, akkor  $f$  monoton.
- (g) Ha  $f$  integrálfüggvénye konvex, akkor  $f$  értékét megszámlálható sok pontban megváltoztathatjuk úgy, hogy monoton legyen.
- (h) Ha  $f$  Darboux-tulajdonságú és integrálható, akkor van primitív függvénye.

**12.10.** Van-e olyan függvény, aminek a  $\sqrt{|x|}$  (a) integrálfüggvénye; (b) primitív függvénye?

7

**12.11.** Legyen  $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{\sin t} dt$ , ha  $x \geq 0$ .  $f'(x) = ?$

**12.12.**

$$\int e^{7x+5} dx = ? \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = ? \quad \int (x^4+1)^8 x^3 dx = ? \quad \int 3^x dx = ?$$
$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = ? \quad \int \frac{2x+3}{3x+2} dx = ? \quad \int \frac{1}{x \log x} dx = ? \quad \int \cos(\sin x) \cos x dx = ?$$

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

**PM12.1.** (Beadható: április 10-ig.)

Van-e olyan  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely korlátos, létezik primitív függvénye, de nem Riemann-integrálható?