

13. Valós analízis gyakorlat, 2019. április 3.

Határozott integrálok kiszámítása előtt előbb mindig becsüljük meg az eredményt!

Milyen végeredményt hiszünk el?

13.1. Számítsuk ki parciális integrálással:

$$\int_0^1 x e^x dx \quad \int_0^\pi (x^2+2x) \cos x dx \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad \int_1^e 1 \cdot \log^2(x) dx \quad \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \quad \int_0^1 \operatorname{ar} \operatorname{sh} x dx$$

13.2. Számítsuk ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \sin u, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}; \quad x = \cos v, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}, \quad 0 \leq w.$$

Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény ugyanaz.

13.3.

$$\int \sqrt{x^3+x^4} dx \quad \int_0^1 \sqrt{2^x-1} dx \quad \int \sin x \cdot \log(\operatorname{tg} x) dx \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$$

13.4. Számítsd ki parciális integrálással (helyettesítés nélkül!) a következő integrálokat:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \quad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad \int \sqrt{x^2-1} dx \quad \int \sqrt{1+x^2} dx$$

(Segítség, egyben félrevezetés: $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = (x-1)' \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.)

13.5. (a) Mutass legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2+1} dx$ integrálási feladat racionális tört integrálására vezet.

(b) Mutass legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2-1} dx$ integrálási feladat racionális tört integrálására vezet.

Házi feladatok

13.6. Számítsuk ki parciális integrálással:

$$\int_0^\pi x^5 \cos x dx \quad \int_0^\pi x^3 \sin(2x) dx \quad \int_0^{3/2} \operatorname{ar} \operatorname{th} x dx \quad \int_{13/12}^{5/3} \operatorname{ar} \operatorname{ch} x dx$$

13.7. Számítsd ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad 0 < t; \quad x = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad 0 < \xi; \quad x = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}, \quad 0 < \zeta.$$

Ellenőrizd, hogy a kapott eredmény ugyanaz.

13.8.

$$\int e^{ax} \cos(bx) \sin(cx) dx \quad \int_1^e \log^3(x) dx \quad \int_{1/4}^{3/4} \sqrt{x} \operatorname{ar} \operatorname{sin} \sqrt{x} dx \quad \int \cos x \cdot \log(\operatorname{tg} x) dx \quad \int \frac{\log \log x}{x} dx$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM13.1. (Beadható: április 17-ig.)

Legyen $f, g \in R([a, b])$, egy-egy integrálfüggvényük F , illetve G . Bizonyítsd be, hogy

$$\int_a^b F \cdot g = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b f \cdot G.$$

A korábbi feladatsorok itt: <http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/>

További gyakorló feladatok: <http://mat-peldatar.elte.hu>