

## 15. Valós analízis gyakorlat, 2019. április 10.

**Konkrét számok kiszámítása előtt előbb mindig becsüljük meg az eredményt!  
Milyen végeredményt hiszünk el?**

15.1.

$$\int_0^{10\pi} \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$$

15.2. Számítsuk ki az  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) cikloisív alatti területet és a cikloisív hosszát.

15.3. A szinuszfüggvény grafikonjának 0 és  $\pi$  közötti ívét megforgatjuk az  $x$ -tengely körül. Mekkora az így kapott, szivar alakú test térfogata?

15.4. Határozzuk meg az  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  polárkoordinátás egyenletű lemniszkáta területét. Adjuk meg e lemniszkáta egyenletét Descartes koordinátákkal is.

15.5. Számítsuk ki a gömböv ( $x \in [a, b]$ ,  $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$ ) felszínét.

15.6. A Wallis-formula mintájára legyen tetszőleges  $n, k \geq 0$  egészek esetén

$$I_{n,k} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n (\cos x)^k dx.$$

(a)  $I_{n,k} = ?$  (Segítség: mint a Wallis-formulánál, integráljunk parciálisan.)

(b) Hogyan terjeszthetnénk ki a binomiális együtthatókat nem egész értékekre? Mennyi legyen  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^?$

15.7. Legyen tetszőleges  $\alpha \geq 0$ -ra  $I_\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^\alpha dt$ .

(a) Bizonyítsuk be, hogy  $\alpha \rightarrow \infty$  esetén  $I_\alpha \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}}$ .

(b) Legyen  $f(\alpha) = (\alpha + 1)I_\alpha I_{\alpha+1}$ . Igazoljuk, hogy az  $f$  függvény 1 szerint periodikus.

(c) Bizonyítsuk be, hogy  $I_\alpha \cdot I_{\alpha+1} = \frac{2\pi}{\alpha + 1}$ .

### Házi feladatok

15.8.

$$\int_0^{10\pi} \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$$

15.9. Milyen hosszú a  $\operatorname{ch} x$  függvény grafikonjának a  $(0, 1)$  és az  $(a, \operatorname{ch} a)$  pont közötti íve?

15.10. Egy egyenes körhengert elmetszünk egy síkkal, ami illeszkedik az egyik alapkör középpontjára, és érinti a másik alapkört. Milyen arányban osztja ketté ez a sík a henger térfogatát?

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

**PM15.1.** (Beadható: április 24-ig.) (a) Mi a kapcsolat az  $n$ -dimenziós,  $r$  sugarú gömb térfogata és az  $\int_0^\pi (\sin x)^n dx$  integrál között?

(b) Mennyi legyen a  $\delta$ -dimenziós,  $r$  sugarú gömb térfogata, ha  $\delta > 0$  valós szám?