

## 16. Valós analízis gyakorlat, 2019. április 12.

**16.1.** Az  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) cikloisívet körbeforgatjuk az  $x$ -tengely körül. Mekkora az így kapott test térfogata és felszíne?

**16.2.** Milyen  $\alpha$  értékekre konvergálnak ezek az improprius integrálok?

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx; \quad \int_0^1 x^{\alpha} dx; \quad \int_0^{\infty} x^{\alpha} dx.$$

**16.3.** Igaz vagy hamis?

- (a) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és  $\int_0^{\infty} f$  konvergens, akkor  $f$  korlátos.  
(b) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és  $\lim_{\infty} f = 0$ , akkor  $\int_0^{\infty} f$  konvergens.  
(c) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos,  $\lim_{\infty} f = 0$ , és  $f$  integrálfüggvénye korlátos, akkor  $\int_0^{\infty} f$  konvergens.

**16.4.**

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x} dx \quad \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} dx \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^4} \quad \int_1^{\infty} \frac{2x \log x}{(1+x^2)^2} dx$$

### Házi feladatok

**16.5.** Mekkora a tórusz térfogata és felszíne?

**16.6.** Igaz vagy hamis?

- (a) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és  $\int_0^{\infty} f$  konvergens, akkor  $\lim_{\infty} f = 0$ .  
(b) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és  $\int_0^{\infty} f$  konvergens, akkor  $\liminf_{\infty} f = 0$ .  
(c) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  folytonos, és  $\int_0^{\infty} f$  konvergens, akkor  $\limsup_{\infty} f = 0$ .  
(d) Ha  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  folytonos, és  $\int_0^{\infty} f$  konvergens, akkor  $\liminf_{\infty} f = 0$ .  
(e) Ha  $f \geq 0$ , akkor az  $\int_{\alpha}^{\beta} f$  improprius integrál biztosan létezik.

**16.7.** Konvergensek-e a következő improprius integrálok? Adjuk meg az értéküket is, ha van.

$$\int_0^1 \log x dx \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

**16.8.** Igazoljuk, hogy  $a > 0$  esetén

$$\frac{e^{-a}}{a+1} < \int_a^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx < \frac{e^{-a}}{a}.$$

**16.9.** Egy síkidomot a  $t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  egyszerű, zárt, folytonosan differenciálható görbe határol. A görbe pontjaiban  $y > 0$ . A síkidomot körbeforgatjuk az  $x$ -tengely körül. Írjunk fel olyan integrálokat, amelyek megadják az így kapott test térfogatát és felszínét.