17. Valós analízis gyakorlat, 2019. április 24.

Házi feladat volt:

16.4./e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

16.5. Mekkora a tórusz térfogata és felszíne?

16.6. Igaz vagy hamis?

(a) Ha $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\lim\limits_\infty f=0$.
(b) Ha $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf\limits_\infty f=0$.
(c) Ha $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\limsup\limits_\infty f=0$.
(d) Ha $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf\limits_\infty f=0$.
(e) Ha $f\geq 0$, akkor az $\int_\alpha^\beta f$ improprius integrál biztosan létezik.

16.7. Konvergensek-e a következő improprius integrálok? Adjuk meg az értéküket is, ha van.

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x\log^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

16.8. Igazoljuk, hogy $a>0$ esetén $\displaystyle\frac{e^{-a}}{a+1}<\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x<\frac{e^{-a}}{a}$.

16.9. (szorgalmi) Egy síkidomot a $t\mapsto(x(t),y(t))$, $a\leq t\leq b$ egyszerű, zárt, folytonosan differenciálható görbe határol. A görbe pontjaiban $y>0$. A síkidomot körbeforgatjuk az x-tengely körül. Írjunk fel olyan integrálokat, amelyek megadják az így kapott test térfogatát és felszínét.

Új feladatok:

17.1. Mi az integrandus nagyságrendje, ha $x\to\infty$? Avagy, becsüljük alulról vagy felülről valamilyen Cx^α alakú függvénnyel. Konvergens-e az improprius integrál?

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_e^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}\log x}\,\mathrm{d}x$$

17.2. Milyen c valós számokra konvergens?

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} x)^c\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x}\right)^c\,\mathrm{d}x$$

17.3. (a) Integráld parciálisan, és bizonyítsd be, hogy $0<a<b$ esetén $\displaystyle\left|\int_a^b \sin e^x\,\mathrm{d}x\right|<2e^{-a}$.

(b) Bizonyítsd be, hogy az $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin e^x\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens.

17.4. Mik azok a c valós számok, amikre az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^c}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens?

17.5. Legyen $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ differenciálható függvény.
(a) Igazoljuk, hogy ha $\limsup_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}<-1$, akkor az $\int_1^\infty f$ improprius integrál konvergens.
(b) Igazoljuk, hogy ha $\exists x_0\,\forall x>0\ \frac{xf'(x)}{f(x)}\geq -1$, akkor az $\int_1^\infty f$ improprius integrál divergens.

Házi feladatok

17.6. Milyen c valós számokra konvergens?

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[6]{1+x^c}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_\pi^\infty \frac{1+\sin^2 2x}{x^c}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{ar\,th} x}{x^2}\right)^c\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty \sin x^c\,\mathrm{d}x$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM17.1. (Beadható: május 8-ig.)

Igazold, hogy ha $f>0$, és az $\int_3^\infty f$ konvergens, akkor az $\displaystyle\int_3^\infty \big(f(x)\big)^{1-\frac{1}{\log x}}\,\mathrm{d}x$ integrál is konvergens.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`