18. Valós analízis gyakorlat, 2019. április 26.

Házi feladat volt:

17.6+17.2/b Milyen c valós számokra konvergens?

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[6]{1+x^c}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_\pi^\infty \frac{1+\sin^2 2x}{x^c}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{ar\,th} x}{x^2}\right)^c \mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty \sin x^c\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x}\right)^c \mathrm{d}x$$

17.3/b A szerdán bizonyított $\left|\int_a^b \sin e^x\,\mathrm{d}x\right| < 2e^{-a}$ becslés felhasználásával igazold, hogy az $\int_{-\infty}^\infty \sin e^x\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens.

Új feladatok:

18.1. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat közvetlenül és parciális integrálással is.

$$\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}[x] \qquad \int_0^1 x^2\mathrm{d}[e^x]; \qquad \int_0^1 \{x\}\mathrm{d}(\sin \pi x)$$

18.2. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Melyik állításból melyik következik?
(a) f grafikonja rektifikálható. (b) f korlátos változású. (c) f folytonos. (d) f korlátos.
(e) f monoton. (f) f Lipschitz. (g) f két monoton függvény összege.

18.3. Legyen $N(r)$ az origó középű, $r\ge 1$ sugarú körbe eső rácspontok száma, és legyen $L(r)$ a körbe eső, origótól különböző rácspontok origótól mért távolságai logaritmusának összege.

Tudjuk, hogy $N(r) = r^2\pi + O(r^\vartheta)$ valamilyen $\vartheta < 1$ számmal. ($\vartheta = 1$ triviális; $\vartheta = 2/3$ elemi; $\vartheta = 131/208 \approx 0.63$ ismert; $\vartheta = 1/2$-re nem igaz.)
(a) Írjuk fel $L(r)$-t $N(r)$ szerinti Riemann-Stieltjes integrál alakban, majd integráljunk parciálisan.
(b) Írjunk fel hibatagos becslést $L(r)$ értékére.

Házi feladatok

18.4. Milyen valós c-re konvergens?

$$\int_{n=10}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(\log x)^c} \qquad \sum_{n=10}^\infty \frac{1}{n\cdot(\log n)^c} \qquad \sum_{n=10}^\infty \frac{1}{n\cdot \log n\cdot(\log\log n)^c} \qquad \int_0^1 x\,\mathrm{d}(e^x)$$

18.5. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat közvetlenül és parciális integrálással is.

$$\int_0^1 [x]\,\mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^1 [x+0.5]\,\mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}\left[\sqrt{x}\right] \qquad \int_0^\pi x\,\mathrm{d}(\sin x) \qquad \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}(\sin x)$$

18.6. Legyen

$$f(x) = \sum_{p\le x}\frac{1}{p} \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p};$$

mindkét szumma az x-nél nem nagyobb prímszámokon fut végig.
(a) Írjuk fel $f(x)$-et g szerinti Riemann-Stieltjes integrál alakban, majd integráljunk parciálisan.
(b) Csebisev a Legendre-formulából (az $n!$ prímtényezős felbontásából) olvasta le, hogy

$$g(x) = \log x + O(1).$$

Vezessük le ebből, hogy a

$$\lim_{x\to\infty}\Big(f(x) - \log\log x\Big)$$

határérték lértezik és véges.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM18.1. (Beadható: május 10-ig.)

Legyen $\pi(x) = \sum_{p\le x} 1$ a prímek száma x-ig, és $\vartheta(x) = \sum_{p\le p}\log p$ a prímek logaritmusösszege (Csebisev-féle ϑ-függvény.) Riemann-Stieltjes integrálok segítségével igazold, hogy a következő állítások ekvivalensek:
(a) $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$, ha $x\to\infty$; (b) $\vartheta(x)\sim x$, ha $x\to\infty$.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu