19. Valós analízis gyakorlat, 2019. május 3.

19.1.

$$V\big(\sin x, [0, 4\pi]\big) = ? \qquad V\big([x], [0, 5]\big) = ?$$

19.2. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Melyik állításból melyik következik?
(a) f grafikonja rektifikálható. (b) f korlátos változású. (c) f folytonos. (d) f korlátos.
(e) f monoton. (f) f Lipschitz. (g) f két monoton függvény összege.

19.3. Mutassuk meg, hogy ha f és g korlátos változásúak $[a, b]$-n, akkor fg is az.

Házi feladatok

17.6/d Integráljuk parciálisan, és így mutassuk meg, hogy $c > 1$ esetén $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^c \,\mathrm{d}x$ konvergens.

19.4. Mi a $\{x\}$ függvény totális variációja a $[0, 3]$ intervallumban?

19.5. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$ függvény korlátos változású a $[-1, 1]$-en.

19.6. Adjunk példát $[0, 1]$-ben differenciálható, de nem korlátos változású függvényre.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok (határidő: máj. 17)

PM19.1. Hogyan definiálhatnánk az $\int_a^b f \cdot |\,\mathrm{d}g|$ integrált? Mondj elégséges feltételeket a létezésére.

PM19.2. Terjesszük ki a Stieltjes-integrált improprius értelemben. Legyen $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \;\mathrm{d}g$ Stieltjes integrál létezik tetszőleges $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ intervallumban. Legyen $\int_\alpha^\beta = \lim_{a \to \alpha+} \lim_{b \to \beta-} \int_a^b f \;\mathrm{d}g$. Igazoljuk, hogy ha $\int_\alpha^\beta |f| \cdot |\,\mathrm{d}g|$ véges, akkor $\int_\alpha^\beta f \;\mathrm{d}g$ konvergens.