20. Valós analízis gyakorlat, 2019. május 8.

20.1. Mely pontokban konvergens az $f_n(x) = \cos(\frac{x}{n})$ függvénysorozat? Egyenletes-e a konvergencia $[0,1]$-en, illetve $\mathbb{R}$-en?

20.2. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{2n} \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

20.3. Igaz-e, hogy

(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze Lipschitz?
(f) monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze monoton?
(g) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan monoton?
(h) korlátos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze korlátos?
(i) folytonos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze folytonos?
(j) Lipschitz függvényekből álló sorozat egyenletes limesze Lipschitz?

20.4. Igaz-e, hogy ha a folytonos $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló (f_n) sorozat egyenletesen konvergens az $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ halmazon, akkor a teljes intervallumon egyenletesen konvergens?

20.5. Mutassuk meg, hogy ha $c > 1$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^c}$ függvénysor egyenletesen konvergens.

20.6. Mutassunk példát olyan, nemnegatív függvényekből álló, egyenletesen konvergens függvénysorra, amire nem alkalmazható a Weierstrass-kritérium.

20.7. Igaz-e, hogy ha $f_1, f_2, \ldots$ folytonos, nemnegatív értékű függvények egy sorozata, akkor az

$$F(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$$

függvény is folytonos?

20.8. Igaz-e a Bolzano-Weierstrass tétel $C[a,b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy folytonos $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvények bármely, egyenletesen korlátos sorozatából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat?

Házi feladatok

20.9. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1+x^n} \qquad \sqrt[n]{1+x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$

20.10. Igaz-e, hogy

(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze differenciálható?
(e) konvex függvényekből álló sorozat egyenletes limesze konvex?
(f) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan konkáv?
(g) integrálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze integrálható?
(h) differenciálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze differenciálható?

20.11. Legyen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

az Euler-féle zeta-függény.

(a) Milyen sor állíthatja elő $\zeta(s)$ deriváltját?
(b) Bizonyítsuk be, hogy $\zeta(s)$ akárhányszor differenciálható az $(1,\infty)$ intervalumban.

20.12. Igaz-e a Weierstrass-tétel $C[a,b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy ha $H \subset C[a,b]$ nem üres, korlátos, zárt halmaz, és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény („funkcionál”), akkor f-nek van maximuma?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat (máj. 19. 24:00)

PM20.1. Van-e olyan, folytonos függvényekből álló sorozat, amely a Dirichlet-függvényhez tart pontonként?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an2i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu