

Analízis ZH, 2019. május 15.

1.

$$(a) \int_0^\pi x^5 \cos x \, dx =? \quad (b) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} =?$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} =?$$

3. Bizonyítsd be, hogy $a > 0$ esetén

$$\int_a^\infty e^{-x^2} \, dx < \frac{e^{-a^2}}{2a}.$$

4. Hol van az $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$ fél cikloisív, az x -tengely és az $x = \pi$ egyenes által határolt síkidom súlypontja?

5. Mik azok a c valós számok, amikre az

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{ar} \operatorname{cth} x}{(x-1)^c} \, dx$$

improprius integrál konvergens?

6. Az f_1, f_2, \dots folytonos $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre bármely $x \in [0, 1]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$. Igazold, hogy ha $f_n \rightarrow 0$ pontonként, akkor $f_n \rightarrow 0$ egyenletesen.

7. Egy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ számelméleti függvényre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^n f(k) = n \log n + \mathcal{O}(n).$$

(Ilyen függvény például az osztók száma.) Vezess le ebből, a fentihez hasonló, hibatagos becslést a $\sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k}$ összegre.