Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)

2018/2019, II. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem. A felkészülési időben az íróeszközökön kívül egy A4-es lap, saját kézzel írt jegyzet használható.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/An4-Sillabusz.pdf

A tételjegyzék pedig innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/An4-Teteljegyzek.pdf

Részletes tételjegyzék

1. A Green-tétel

Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék. Görbeindex. Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Jordan-tartomány. Egyszerű zárt görbe irányítása. Skalármezők és vektormezők. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). Jordan-tartomány területe vonalintegrál alakban. Rotációmentes vektormező vonalintegrálja Jordan-tartomány határán. Kiterjesztés több görbével határolt tartományokra. [LTS2, 200–205. o.]

2. Integráltételek síkban

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). A divergencia nem függ a koordináta-tengelyek irányától. Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. A rotáció nem függ a koordináta-tengelyek irányától. Stokes-tétel 2-dimenzióban. [LTS2, 205–210. o.]

3. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafikon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció. A rotáció független a koordináta-rendszertől. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.) [LTS2, 211–221. o.]

4. Mérhető terek és mértékek

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-en.

Halmazrendszerek, megszorítás. Halmazalgebra, gyűrű, modulus, félgyűrű, σ-algebra, σ-gyűrű. Generált struktúrák. Borel-halmazok top. terekben. Mérhető tér. Halmazfüggvények. Monoton, additív σ-additív és σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, akkor $\mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$. Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $\mu(A_1) < \infty$, akkor $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$. [Petruska, 51–52, 55, 81–82. o.]

5. A Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt. [Petruska, 69–70, 81–82. o.]

6. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származtó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. [Petruska, 61–63. o.]

7. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. [Petruska, 64–66. o.]

8. Lebesgue-Stieltjes mértékek egy dimenzióban

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték eloszlásfüggvénye. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra. [Petruska, 69–75. o.]

9. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban. Regularitás

Kiterjesztés véges dimenzióban. Eloszlásfüggvény. Addititív téglafüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték véges dimenzióban. [Petruska, 69–72. o.]

Mérhető halmazok "távolsága". Minden Lebesgue-mérhető halmazhoz van tetszőlegesen közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója. Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. [Petruska, 72–73. o.] [Petruska, 72–75., 59. o.]

10. Nemnegatív függvények integrálja

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció), megszámlálható sok mérhető függvény pontonkénti szuprémuma, infimuma, liminfje, limszupja, a konvergenciahalmaz mérhetősége.

Egyszerű függvények. Nemnegatív mérhető függvény mint egyszerű függvények monoton növő limesze. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek. [Petruska, 52–57. o.]

11. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétel. A MKT. nem igaz csökkenő sorozatra. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Végtelen táblázat összege mint a BLT speciális esete. Fatou-lemma. Példák, amikor a Fatou-lemmában nincs egyenlőség, illetve limsuppal egyik irányban sem igaz. [Petruska, 57–60. o.]

12. Függvénysorozatok integrálja

Előjeles és komplex függvények integrálja. Az $\mathcal{L}_1$ tér. Az $\mathcal{L}_1$ tér egységgömbje zárt a pontonkénti konvergenciára. Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m. [Petruska, 57–60. o.]

13. Riemann- és Lebesgue-Stieltjes integrálok

Alsó és felső burkoló. A burkoló függvények félig folytonosak, ezért Borel-mérhetők. Kapcsolat az alsó és felső Stieltjes integrállal. A Riemann-Stieltjes integrál létezésének feltétele. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele. [Petruska, 76–80. o.]

14. Előjeles mértékek és variációik

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt. [Petruska, 85–89. o.]

15. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. [Petruska, 85–89. o.]

16. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség. [Petruska, 90–91. o.]

17. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói. [Petruska, 91–95. o.]

18. A maximális operátor

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Szimmetrikus, közönséges és erős derivált. Maximális operátor. A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges. [Petruska, 97–100. o.]

19. Borel-mértékek differenciálása

Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0. Lebesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. [Petruska, 100–105. o.]

20. Abszolút folytonos és szinguláris függvények

Abszolút folytonos és szinguláris függvények. Az abszolút folytonosság átfogalmazása ε, δ-val. Példa szigorúan monoton és folytonos, szinguláris függvényre. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és korlátos változás kapcsolata. Szinguláris függvény deriváltja m.m. 0. Abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a derivált integrálfüggvénye. Korlátos változású (spec. monoton) függvény m.m. differenciálható. (Petruska II, 22. fej.)

21. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata. [Petruska, 121, 123–124. o.]

22. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra. [Petruska, 121, 124–126. o.]

23. A Fubini-tétel

[Petruska, 121–123. o.]

24. L_p-terek

L_p-normák. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Konjugált kitevők, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Faktorizálás a m.m. 0 függvények terével. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben $p < \infty$ esetén sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinátájú tégalapon racionális konstans függvények. Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$. Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.) [Petruska, 127–130. o.]

25. L_2-terek

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Schauder-bázis. Az $L_2([a, b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. (Petruska II, 24. fej.)

26. Mértékben való konvergencia

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség. [Petruska, 135–137. o.]

27. Konvolúció és Fourier-transzformált

L_1-beli függvények konvolúciója. L_1 mint kommutatív Banach-algebra. [Petruska, 138. o.] Fourier-transzformált. L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. A Fourier-transzformált homomorfizmus az $(L_1, *)$ és $(L_p, \cdot)$ Banach-algebrák között. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja. Fourier-Stieltjes transzformált. [Halász, 1–2. o.]

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

[Halász] Halász Gábor: Fourier integrál. Egyetemi jegyzet, ELTE, 2005.